Mathe mit dem Känguru

2024

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmende am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2024“

Wir haben letztes Jahr versuchsweise den Aufgabenumfang für unsere Kategorie 3./4. Klasse von 24 auf 18 Aufgaben verkleinert bei gleichzeitiger Reduktion der Wettbewerbszeit von 60 auf 45 Minuten. Eine nach dem Wettbewerb durchgeführte Umfrage bei den betroffenen Schulen mit hoher Rücklaufquote hat bestätigt, dass dies den Kindern besser entspricht, weil sie sich offenbar in diesem Alter noch nicht allzulange konzentrieren können. So haben wir auch dieses Jahr wiederum nur 18 Aufgaben für diese „jüngste Kategorie“ angeboten. Es ist uns wichtig, dass die Känguru-Aufgaben auch Spass machen und nicht zu einer unangenehmen Erfahrung werden.

Dieses Jahr haben sich in der Schweiz 990 Schulen mit insgesamt über 65 000 Teilnehmenden angemeldet. Wir haben die Teilnahme wiederum sowohl auf Papier als auch online angeboten. Letzteres erfreut sich grosser Beliebtheit! Eine technische Herausforderung ist, dass einige Tausend Nutzer am Känguru-Tag gleichzeitig auf den Server zugreifen. Ein paar Schulen haben uns gemeldet, dass sie Probleme mit der Verbindung hatten. Wir müssen leider davon ausgehen, dass es noch mehr sind, als nur diejenigen, die sich gemeldet haben. Wir bedauern diese für alle sehr unangenehme Situation und bitten die Betroffenen um Entschuldigung! Wir werden alles daran setzen, dass es nächstes Jahr für alle gut laufen wird. Eine einfache Sicherheitsmassnahme wäre es auf jeden Fall, dass die Lehrpersonen die Aufgaben auch auf Papier abgeben. Sollte es (worst case) wieder zu Verbindungsproblemen kommen, könnten die Schüler/-innen den Wettbewerb auf Papier fertig lösen.

Weltweit haben sich Kinder und Jugendliche in mehr als 100 Ländern an den Aufgaben versucht. Im internationalen Verein „Kangourou sans frontières“ arbeiten diese Länder zusammen. Die vielen hübschen oder ungewöhnlichen Fragestellungen sowie überhaupt die Vielgestaltigkeit der Aufgaben rühren daher, dass sehr unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus verschiedenen Kulturen einfliessen. In der Broschüre ist angegeben, aus welchen Ländern die Vorschläge für die Aufgaben kamen.

Känguru-Teilnehmerländer 2024

„Känguru Schweiz“ hat dieses Jahr den Wettbewerb in Deutsch, Englisch, Französisch und Rhätoromanisch angeboten, wobei Letzteres sich auf die drei Idiome Vallader, Putèr und Sursilvan verteilt. Für die Übersetzungen und den online-Satz im Wettbewerbssystem danken wir herzlich den von der ETH zur Verfügung gestellten Hilfsassistentinnen Mina Camenisch und Marie Haas sowie Loïc Cellier fürs Französisch und der Organisation *Lia Rumantscha* für die drei Idiome.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von Martin Altmann, Deindra Hanzig, Dr. Monika Noack und Alexander Unger unter Mitwirkung von Maria Cannizzo, Sandra Czekay, Lukas Fischer, Bertram Hell, Birgit und Ulf Hutschenreiter, Dr. Marion Jarmer, Isabelle Kirner, Birgit Maier, Dr. Antje Noack, Nadine Rhyner, Solveg Schlinske, Andreas Stahel und Dr. Dorothea Vigerske erarbeitet.

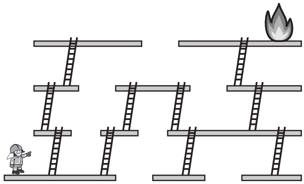
Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V., www.mathe-kaenguru.de
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Vetters GmbH & Co. KG, Radeburg

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

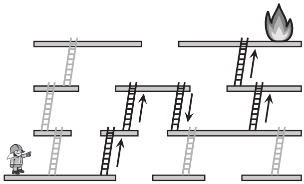
Klassenstufen 3 und 4



1. Die Feuerwehrfrau hat es eilig. Sie muss das Feuer löschen und sucht den schnellsten Weg dorthin.
Wie viele Leitern muss sie benutzen?

Dänemark

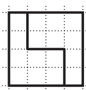
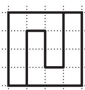
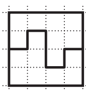
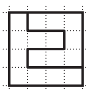
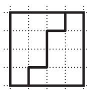
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9



Lösung: Die drei Leitern links führen ins Leere und ebenso die beiden Leitern rechts unten. Über die übrigen 5 Leitern gelangt die Feuerwehrfrau zum Feuer. Da diese wirklich alle nötig sind, um zum Feuer zu gelangen, ist das der gewünschte schnellste Weg.

2. Welches Quadrat ist in zwei <u>unterschiedliche</u> Teile geteilt?

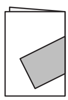
Schweiz

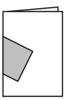
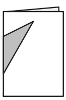
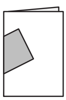
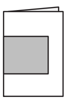
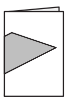
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

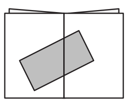
Lösung: Bei (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) sind die beiden Teile jeweils gleich. Eines der Teile erhält man jeweils durch Drehen des anderen Teils. Bei (**D**) sind die beiden Teile unterschiedlich, sie sind sogar unterschiedlich gross, wie man durch Abzählen der Kästchen feststellen kann.

3. Juna zeichnet auf ein Blatt Papier ein Rechteck. Dann faltet sie es und sieht: Wie könnte das gefaltete Blatt <u>von hinten</u> aussehen?

USA


von vorn

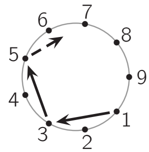
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 



Lösung: Wenn wir das gefaltete Blatt wieder aufklappen, erhalten wir dasselbe Bild als würden wir die Rückseite, wie sie sich unter den Antwortmöglichkeiten befindet, neben die Vorderseite legen. Nur bei (**C**) ergibt sich ein Rechteck.

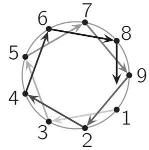
4. Bei einem Spiel stehen 9 Kinder im Kreis. Sie werfen reihum einen Ball, immer zu dem Kind, das 2 Plätze weiter links steht. Das Kind an Punkt 1 beginnt. Jedes Kind wirft den Ball genau einmal. Ida wirft den Ball als Letzte.
An welchem Punkt steht Ida?

Ghana



(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 2

Lösung: Wir zeichnen die Pfeile ordentlich weiter und erhalten so die Lösung. Den Ball werfen der Reihe nach die Kinder an den Punkten 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8. Ida steht folglich am Punkt 8.



Welche Ziffern müssen in die leeren Kästchen eingetragen werden, damit die Rechnung stimmt?

$$\square \cdot \boxed{2}\boxed{5}\boxed{0} + \square \cdot \boxed{6} = \boxed{2}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{4}$$

5. Vor dem Haus stehen 7 Mülltonnen. Sie sind gelb, schwarz oder blau, von jeder Farbe eine andere Anzahl. Gelbe Tonnen gibt es am meisten. Wie viele gelbe Tonnen sind es?

Nigeria

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Von den schwarzen und den blauen Tonnen gibt es von der einen Farbe mindestens 1 Tonne und von der anderen Farbe mindestens 2 Tonnen. Also kann es nicht mehr als $7 - 1 - 2 = 4$ gelbe Tonnen geben. Weniger als 4 gelbe Tonnen können es auch nicht sein, denn dann wären es insgesamt höchstens $1 + 2 + 3 = 6$ Tonnen, also weniger als 7. Folglich stehen vor dem Haus 4 gelbe Tonnen.

6. An der Tafel waren 3 aufeinanderfolgende 3-stellige Zahlen der Reihe nach angeschrieben. Lotta hat aus Spass 4 Ziffern weggewischt.
Welche Ziffern hat Lotta von links nach rechts weggewischt?

Iran

(**A**) 8 4 5 9 (**B**) 9 4 4 9 (**C**) 8 3 2 7 (**D**) 7 4 4 8 (**E**) 9 5 6 9

Lösung: Die mittlere der 3 Zahlen endet auf 98. Da es 3 aufeinanderfolgende Zahlen sind, enden die linke Zahl auf 97 und die rechte Zahl auf 99. Die linke Zahl ist also 497, die mittlere somit 498 und die rechte 499. Die Ziffern, die Lotta weggewischt hat, sind von links nach rechts 9 4 4 9.

7. Der Koch in unserer Schulküche ist ein grosser Känguru-Fan. Er hat in diesem Jahr sogar ein Känguru-Poster aufgehängt.
Wie viele Fliesen sind hinter dem Poster?

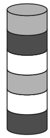
Irak

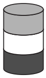
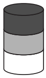
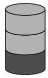
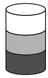
(**A**) 32 (**B**) 35 (**C**) 38 (**D**) 44 (**E**) 49

Lösung: Wir zählen am linken und am oberen Rand des Posters die Kästchen aus. Das Poster bedeckt eine Fläche, die 5 Kästchen breit und 7 Kästchen hoch ist. Also sind hinter dem Poster $5 \cdot 7 = 35$ Fliesen.

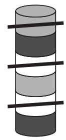
8. Aus dem rechts abgebildeten Turm entfernt Jasmin die 2. Scheibe von unten. Aus dem so entstandenen Turm entfernt sie dann die 3. Scheibe von unten. Aus dem nun entstandenen Turm entfernt sie dann die 4. Scheibe von unten. Wie sieht der Turm jetzt aus?

Polen



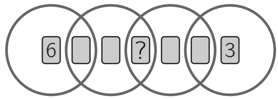
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir streichen im ursprünglichen Turm die Scheiben, die Jasmin entfernt, der Reihe nach durch. Dabei achten wir darauf, dass wir bereits entfernte Scheiben nicht mehr mitzählen. So erkennen wir die Lösung. Übrig bleibt der Turm, der bei (**A**) zu sehen ist.



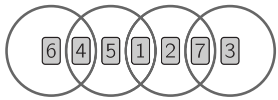
9. Sieben Karten mit den Zahlen von 1 bis 7 werden wie im Bild in die Ringe gelegt. In jedem Ring ist die Summe aller Zahlen 10. Welche Zahl steht auf der Karte mit dem Fragezeichen?

China



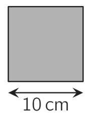
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 7

Lösung: Da in jedem Ring die Summe aller Zahlen 10 ist, können wir zunächst die fehlenden Zahlen in den beiden äusseren Ringen bestimmen. Auf der zweiten Karte von links steht die 4, denn $6 + 4 = 10$, und auf der zweiten Karte von rechts steht die 7, denn $7 + 3 = 10$.
Es bleibt herauszufinden, wo die Karten mit den Zahlen 1, 2 und 5 liegen.
Die fehlenden Zahlen im zweiten Ring haben die Summe 6, denn $4 + 6 = 10$. Diese beiden Zahlen müssen also die 1 und die 5 sein. Die 2 steht damit auf der dritten Karte von rechts.
Im dritten Ring kennen wir nun bereits zwei der drei Zahlen: 2 und 7. Die dritte Zahl muss die 1 sein, denn $1 + 2 + 7 = 10$. Und das ist die gesuchte Zahl auf der Karte mit dem Fragezeichen.
Rechts ist zu sehen, wie alle sieben Karten in den Ringen liegen.



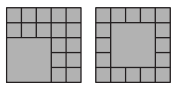
10. Ada teilt das abgebildete Quadrat in ein Quadrat mit Seitenlänge 6 cm und kleine Quadrate mit Seitenlänge 2 cm. Wie viele Quadrate erhält Ada?

Mexiko



(**A**) 9 (**B**) 11 (**C**) 13 (**D**) 15 (**E**) 17

Lösung: Wir fertigen eine Zeichnung an und zählen die Quadrate aus. Das Quadrat mit Seitenlänge 6 cm kann in einer Ecke oder in der Mitte liegen. In jedem Fall sind es 16 kleine Quadrate mit Seitenlänge 2 cm. Zusammen mit dem einen Quadrat mit Seitenlänge 6 cm erhält Ada also 17 Quadrate.



Ada möchte einen Würfel mit Kantenlänge 6 cm zu einem Würfel mit Kantenlänge 10 cm erweitern. Wie viele Würfel mit Kantenlänge 2 cm muss sie dazu anbauen?

11. Milo schreibt die Zahlen von 1 bis 20 ohne besondere Ordnung in eine Reihe. Vor der Zahl 13 stehen genau 5 Zahlen, die grösser als 13 sind. Hinter der Zahl 13 stehen genau 8 Zahlen, die kleiner als 13 sind. An welcher Stelle steht die Zahl 13?

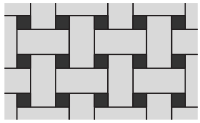
Russland

(**A**) an der 6. (**B**) an der 7. (**C**) an der 8. (**D**) an der 9. (**E**) an der 10.

Lösung: Es gibt 12 Zahlen, die kleiner als 13 sind, nämlich die Zahlen von 1 bis 12. Nach Aufgabenstellung stehen 8 davon hinter der Zahl 13. Vor der 13 stehen also die anderen $12 - 8 = 4$ dieser Zahlen. Laut Aufgabenstellung stehen auch 5 Zahlen, die grösser als 13 sind, vor der 13. Damit stehen $4 + 5 = 9$ Zahlen vor der 13. Die Zahl 13 steht damit an 10. Stelle in der Reihe.

12. Der Vorraum der Turnhalle wurde neu gefliest. Als Fliesen gibt es graue Rechtecke und schwarze Quadrate. Die grauen Rechtecke sind 23 cm lang und 11 cm breit.
Welche Seitenlänge haben die schwarzen Quadrate?

Finnland



(**A**) 3 cm (**B**) 4 cm (**C**) 5 cm (**D**) 6 cm (**E**) 7 cm

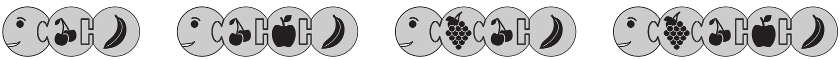
Lösung: Aus dem Bild entnehmen wir, dass die lange Rechtecksseite genauso lang ist wie eine kurze Rechtecksseite und zwei Quadratseiten zusammen. Also sind zwei Quadratseiten zusammen $23\,\text{cm} - 11\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ lang. Die schwarzen Quadrate haben somit die Seitenlänge $12\,\text{cm} : 2 = 6\,\text{cm}$.

13. Ria spielt mit einem Raupenpuzzle. Zwischen Kopf und Endstück soll Rias Raupe 1 oder 2 oder 3 Teile haben. Wie viele verschiedene Raupen kann Ria puzzeln?

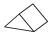
Deutschland

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

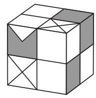
Lösung: Wir müssen beachten, dass es zwei Sorten von Ausbuchtungen gibt: runde und eckige. An den Kopf passen nur das Teil mit der Kirsche und das Teil mit der Traube. An das Endstück passen nur das Teil mit dem Apfel und das Teil mit der Kirsche.
Wenn wir an den Kopf das Teil mit der Kirsche anlegen, dann können wir direkt das Endstück anlegen oder erst das Teil mit dem Apfel und dann das Endstück. Das ergibt 2 mögliche Raupen. Wenn wir an den Kopf das Teil mit der Traube anlegen, dann muss das Teil mit der Kirsche folgen, denn dieses ist das einzig passende. Nun können wir direkt das Endstück anlegen oder erst das Teil mit dem Apfel und dann das Endstück. Das ergibt noch einmal 2 mögliche Raupen. Insgesamt sind 4 Raupen möglich.



— Ein ähnliches, aber schwierigeres Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 21 zu lösen. —

14. Mit weissen Bausteinen  und grauen Bausteinen  soll der abgebildete Würfel gebaut werden. Die Anzahl an weissen Bausteinen soll so klein wie möglich sein. Wie viele weisse Bausteine werden benötigt?

Russland



(**A**) 18 (**B**) 17 (**C**) 16 (**D**) 15 (**E**) 14

Lösung: Die vordere Schicht des grossen Würfels besteht aus 4 kleineren Würfeln. Im Bild sehen wir, dass für diese Schicht 2 graue und $1+1+4+4 = 10$ weisse Bausteine benötigt werden. Die hintere Schicht lässt sich ebenfalls aus 4 kleineren Würfeln zusammensetzen. Dann wird die kleinste Anzahl an weissen Bausteinen benötigt, wenn möglichst viele dieser kleineren Würfel aus einem weissen und einem grauen Baustein bestehen. Dies ist für alle 4 möglich, also reichen für die hintere Schicht 4 weisse Bausteine aus. Wir überlegen noch, ob die hintere Schicht auch anders aufgebaut sein könnte, und zwar mit weniger als 4 weissen Bausteinen. Dann müsste sie 5 graue Bausteine und folglich 1 weissen Baustein enthalten, da ein grauer Baustein so viel Platz einnimmt wie 3 weisse. Da es gar nicht möglich ist, eine solche Würfelschicht mit 5 grauen Bausteinen zu bauen, und wir ausserdem in der hinteren Schicht im Bild schon 2 weisse Bausteine sehen, sind weniger als 4 weisse Bausteine in der hinteren Schicht nicht möglich. Die kleinstmögliche Anzahl an weissen Bausteinen ist $10+4 = 14$.

15. Filip ersetzt rechts in den Rechnungen gleiche Symbole durch gleiche Ziffern und verschiedene Symbole durch verschiedene Ziffern. Welches Ergebnis hat △ · ● · ■ ?

Polen

△ + △ = ■ ●

● + △ = ■ ■

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 28 (**E**) 30

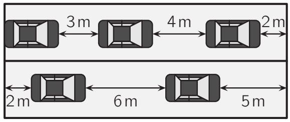
Lösung: In der ersten Rechnung ist die Summe zweier gleicher Ziffern eine 2-stellige Zahl. Also muss △ durch eine Ziffer ersetzt werden, die grösser oder gleich 5 ist. Ausserdem muss ■ durch 1 ersetzt werden, da die Summe zweier Ziffern höchstens 18 ist. Wir setzen nacheinander alle möglichen Ziffern für △ in die erste Rechnung ein und ermitteln für jeden Fall, durch welche Ziffer ● ersetzt werden müsste. Anschliessend überprüfen wir, ob die zweite Rechnung stimmt.

△5 + △5 = ■1 ●0	●0 + △5 ≠ ■1 ■1
△6 + △6 = ■1 ●2	●2 + △6 ≠ ■1 ■1
△7 + △7 = ■1 ●4	●4 + △7 = ■1 ■1
△8 + △8 = ■1 ●6	●6 + △8 ≠ ■1 ■1
△9 + △9 = ■1 ●8	●8 + △9 ≠ ■1 ■1

Nur der dritte Fall ist möglich: △ muss durch 7 ersetzt werden, ● durch 4 und ■ durch 1. Das gesuchte Produkt ist $7 \cdot 4 \cdot 1 = 28$.

16. Auf einer Autofähre stehen 5 gleich grosse Autos. Die wenigen Autos stehen mit grossen Abständen. Wie lang ist ein Auto?

Griechenland

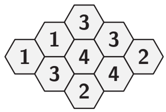


(**A**) 3 m (**B**) 4 m (**C**) 5 m (**D**) 6 m (**E**) 7 m

Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir alle Autos nach links zusammenschieben. In der oberen Reihe wären dann 3 Autos und bis zur rechten Wand $3\,\text{m} + 4\,\text{m} + 2\,\text{m} = 9\,\text{m}$ Abstand. In der unteren Reihe wären dann 2 Autos und nach rechts $2\,\text{m} + 6\,\text{m} + 5\,\text{m} = 13\,\text{m}$ Abstand. In der unteren Reihe ist also $13\,\text{m} - 9\,\text{m} = 4\,\text{m}$ mehr Abstand nach rechts, dafür aber ein Auto weniger. Also ist ein Auto 4 m lang.

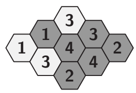
17. Einige Zellen der Bienenwabe enthalten Honig. Die Zahl in jeder Zelle gibt an, wie viele ihrer Nachbarzellen Honig enthalten. Wie viele Zellen in dieser Bienenwabe enthalten Honig?

Türkei



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wir malen Zellen, die Honig enthalten, dunkel. Zuerst suchen wir solche Zellen, die genau so viele Nachbarzellen haben, wie ihre Zahl angibt. Für diese ist klar, dass alle ihre Nachbarzellen dunkel zu malen sind. Das trifft auf die Zelle oben mit der 3 zu, auf die 2 rechts und auf die 4 rechts unten. Wenn wir deren Nachbarzellen dunkel malen, erhalten wir, was im Bild rechts zu sehen ist. Nun überprüfen wir, welche Zellen bereits von so vielen Honigzellen umgeben sind, wie ihre Zahl angibt. Dabei stellen wir fest, dass diese Bedingung schon für alle Zellen gilt. Es ist also genau in den 6 dunkel gemalten Zellen Honig.



— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 5/6 die Aufgabe 19. —

18. Camila, Meret und Pius haben Kekse für das Schulfest gebacken. Einige Kekse wollen sie selbst essen. Diese legen sie in eine Reihe auf den Tisch:

Polen

Die Kinder nehmen sich in irgendeiner Reihenfolge genau einmal Kekse vom Tisch. Ein Kind nimmt alle Herzen, die noch auf dem Tisch liegen. Ein Kind nimmt alle hellen Kekse, die noch auf dem Tisch liegen. Und ein Kind nimmt alle grossen Kekse, die noch auf dem Tisch liegen. Am Ende hat eines der Kinder 3 Kekse, eines 6 Kekse und eines 7 Kekse. Welches Bild zeigt die Kekse, die eines der Kinder genommen hat?

(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

Lösung: Wir müssen die denkbaren Reihenfolgen für die drei Kinder untersuchen. Unten sind diese und die zugehörigen Keks-Anzahlen noch einmal in einem Baumdiagramm dargestellt.
Angenommen, das 1. Kind hat alle Herzen genommen. Dann hätte es 11 Kekse. Das ist aber nicht möglich, da kein Kind 11 Kekse genommen hat.
Angenommen, das 1. Kind hat alle hellen Kekse genommen. Dann hätte es 7 Kekse. Wenn das 2. Kind von den übrigen Keksen alle Herzen genommen hätte, dann hätte es die 9 dunklen Herzen. Das ist aber nicht möglich, da kein Kind 9 Kekse genommen hat. Hätte das 2. Kind alle grossen Kekse genommen, dann hätte es die 4 grossen dunklen Herzen. Auch das ist nicht möglich, da kein Kind 4 Kekse genommen hat.
Also hat das 1. Kind alle grossen Kekse genommen und hat damit 7 Kekse. Wenn das 2. Kind alle Herzen genommen hätte, dann hätte es die 6 kleinen Herzen. Das 3. Kind müsste dann alle hellen Kekse genommen haben, also die 3 kleinen Sterne, die noch auf dem Tisch liegen. So hätten die Kinder wie gefordert 3, 6 und 7 Kekse. Und da wir die 3 kleinen Sterne bei (**A**) finden, ist das die Lösung. Hätte das 2. Kind alle hellen Kekse genommen, dann hätte es die 4 kleinen hellen Kekse, was nicht möglich ist, da kein Kind 4 Kekse genommen hat. Also gibt es nur die eine mögliche Reihenfolge.

1. Kind nimmt ...	2. Kind nimmt ...	3. Kind nimmt ...	
alle Herzen (11)	alle hellen (5)	alle grossen (0)	
	alle grossen (2)	alle hellen (3)	
alle hellen (7)	alle Herzen (9)	alle grossen (0)	
	alle grossen (4)	alle Herzen (5)	
alle grossen (7)	alle Herzen (6)	alle hellen (3)	← gesuchte Aufteilung
	alle hellen (4)	alle Herzen (5)	

Feuerwehr-Knobeleien zum Aufwärmen

1 Gerade wurde der Dienstplan für die nächste Woche aufgestellt. Für jeden der 7 Tage von Montag bis Sonntag sind genau 2 der Feuerwehrfrauen Anja, Stephanie und Katharina eingeteilt. Anja hat an 5 Tagen zu arbeiten und Stephanie an 4 Tagen.
An wie vielen Tagen hat Katharina nächste Woche Dienst?

2 Heute gibt das Feuerwehrorchester bei uns im Dorf ein Konzert. Die Feuerwehrleute spielen jeder entweder ein Streichinstrument, ein Blasinstrument oder ein Schlaginstrument. Genau 13 von ihnen spielen kein Streichinstrument. Und genau 8 von ihnen spielen ein Blasinstrument.
Wie viele der Feuerwehrleute spielen ein Schlaginstrument?

3 Solange die Schläuche noch nicht an einen Hydranten angeschlossen sind, löscht die Feuerwehr ein Feuer mit dem Wasser, das sich im Löschfahrzeug befindet. Im Wassertank befinden sich zu Beginn 5000 Liter Wasser. Die Feuerwehrleute benutzen zum Löschen 2 Schläuche, aus denen jeweils 100 Liter Wasser pro Minute kommen.
Wie viele Minuten lang kann die Feuerwehr auf diese Weise löschen?

4 Bei der Jugendfeuerwehr sollen heute kleine Übungsfeuer gelöscht werden. Ali löscht 5 Feuer in 5 Minuten. Lina löscht 3 Feuer in 2 Minuten. Johanna löscht 4 Feuer in 3 Minuten. Und Lukas löscht 6 Feuer in 7 Minuten.
Wer von ihnen hat pro Feuer die wenigste Zeit benötigt?

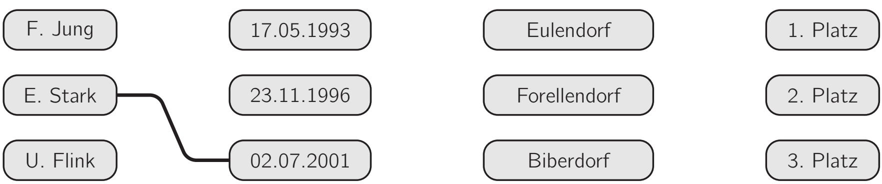
5 Bei der Feuerwehr in unserem Ort haben wir viel Interessantes über die Ausrüstung erfahren. Unter anderem, dass alles ganz schön schwer ist. Die kurzen Feuerwehrschläuche wiegen 10 kg, die langen Feuerwehrschläuche 15 kg, die Atemschutzgeräte 15 kg, die Rettungsschere 16 kg und die Feuerlöscher 12 kg. Einige von diesen Ausrüstungsgegenständen sollen noch in das Feuerwehrauto eingeladen werden. Darunter könnten auch mehrere Gegenstände derselben Sorte sein.
Wie schwer können diese noch einzuladenen Gegenstände insgesamt sicher <u>nicht</u> sein?

42 kg oder 41 kg oder 38 kg oder 33 kg oder 26 kg

6 Auf dem alljährlichen Feuerwehrfest traten die Feuerwehrleute in zahlreichen Wettbewerben gegeneinander an. Die drei erfolgreichsten Feuerwehrmänner stehen nun auf dem Podium und werden ausgezeichnet. Folgendes ist bekannt:

- Herr Stark ist der Jüngste der drei und hat dieses Jahr zum ersten Mal am Fest teilgenommen.
- Der Feuerwehrmann aus Forellendorf hat nicht im Juli Geburtstag.
- Der älteste Feuerwehrmann hat den 2. Platz belegt.
- Der Feuerwehrmann aus Biberdorf ist wie im letzten Jahr auf dem 1. Platz gelandet.
- Herr Jung ist älter als Herr Flink.

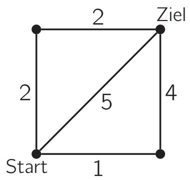
Verbinde jeden Feuerwehrmann mit seinem Geburtstag, seinem Wohnort und seiner Platzierung.

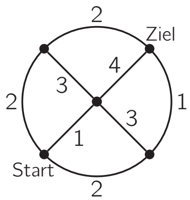


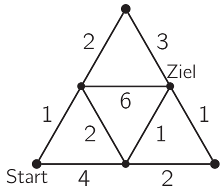
Schnellste Wege gesucht

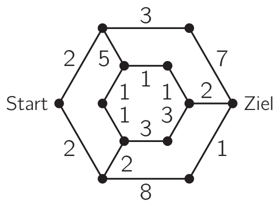
Ein Navi soll in den folgenden 6 Karten jeweils den schnellsten Weg vom Start zum Ziel angeben. Neben jedem Abschnitt zwischen zwei Punkten steht die Fahrzeit in Minuten, die für diesen Abschnitt benötigt wird. Da es sich nur um schematische Darstellungen von Strassen handelt, können die Fahrzeiten in den einzelnen Abschnitten sehr verschieden sein.

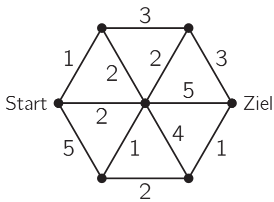
Wer kann jeweils den schnellsten Weg vom Start zum Ziel einzeichnen?

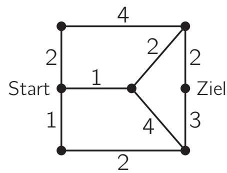






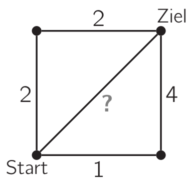


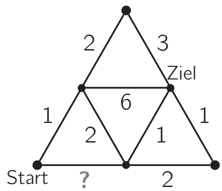


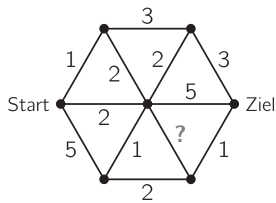


In den folgenden Karten ist einer der Abschnitte mit einem Fragezeichen **?** beschriftet. Der schnellste Weg vom Start zum Ziel soll durch diesen Abschnitt führen. Ausserdem soll dies der einzige schnellste Weg sein.

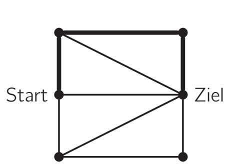
Wie viele ganze Minuten kann die Fahrt durch den Abschnitt mit dem Fragezeichen höchstens dauern?

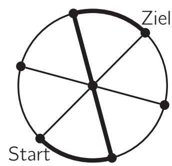


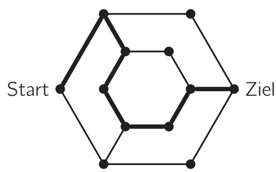




Schreibe in die folgenden Karten selbst an jeden Abschnitt eine ganze Minutenanzahl so, dass der fett gezeichnete Weg der einzig schnellste Weg ist. Bei der ersten Karte dürfen die Zahlen von 1 bis 9 verwendet werden, bei der zweiten Karte die Zahlen von 1 bis 12 und bei der dritten Karte die Zahlen von 1 bis 15. Jede Zahl darf jeweils nur einmal benutzt werden.







Känguru-Farbrätsel

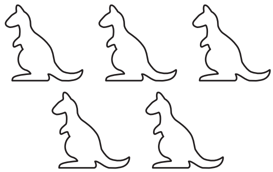
Bei jeder der folgenden Aufgaben sollen die 5 Kängurus so ausgemalt werden, dass alle Bedingungen erfüllt sind. Von den 5 Kängurus sollen bei jeder Aufgabe 2 rot, 1 blau, 1 gelb und 1 grün sein.

Wer findet die richtigen Farbkombinationen?

1. Das grüne Känguru steht direkt links neben dem blauen Känguru.
2. Das blaue Känguru ist irgendwo links vom mittleren Känguru.
3. Die beiden roten Kängurus stehen nicht nebeneinander.

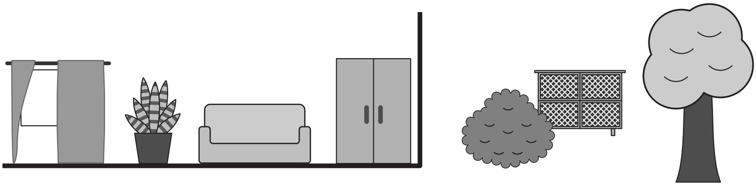
1. Zwischen den 2 roten Kängurus stehen genau 2 andere Kängurus.
2. Das gelbe und das grüne Känguru stehen nicht nebeneinander.
3. Das zweite Känguru von links ist grün.

1. Weder das blaue noch das grüne Känguru steht ganz links in einer der beiden Reihen.
2. Keines der beiden roten Kängurus steht ganz rechts in einer der beiden Reihen.
3. Das gelbe Känguru steht in der Mitte der oberen Reihe, und das blaue Känguru steht in der unteren Reihe.



Versteckte Kängurus

Bei Familie Kling haben sich 5 Kängurus versteckt, und zwar 2 rote, 1 blaues, 1 gelbes und 1 grünes. Sie verstecken sich hinter oder in den abgebildeten Gegenständen. Bei jedem Gegenstand ist höchstens 1 Känguru versteckt.



Über die Verstecke ist Folgendes bekannt:

1. Von den beiden roten Kängurus ist eines im Haus und eines im Garten versteckt.
2. Das blaue Känguru ist entweder hinter dem Sofa oder hinter dem Kaninchenstall versteckt.
3. Im Haus befindet sich ein Känguru mehr als im Garten.
4. Das gelbe und das grüne Känguru sind jeweils hinter einer Pflanze versteckt.
5. Das gelbe und das blaue Känguru sind jeweils direkt links von einem roten Känguru versteckt.

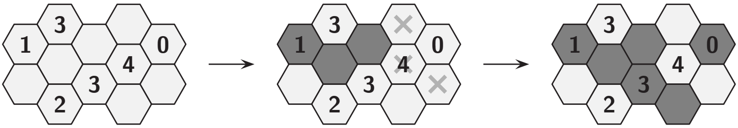
Wo sind die fünf Kängurus versteckt?

Honigrätsel

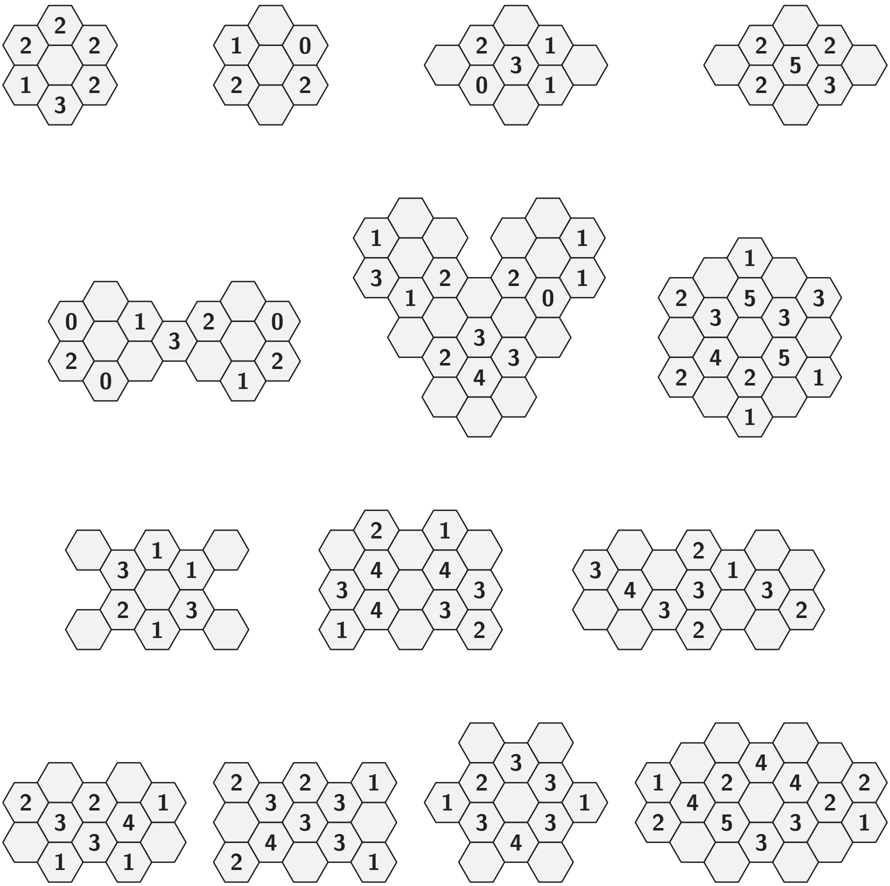
In den abgebildeten Bienenwaben enthalten einige Zellen Honig. Diese gilt es zu finden. Zellen, die Honig enthalten, sollen grau ausgemalt werden. In einigen Zellen stehen Zahlen. Diese geben jeweils an, wie viele der zu dieser Zelle benachbarten Zellen Honig enthalten.

Beim Lösen ist es hilfreich, Zellen mit einem Kreuz zu markieren, die sicher keinen Honig enthalten.

Hier ist ein Beispiel:



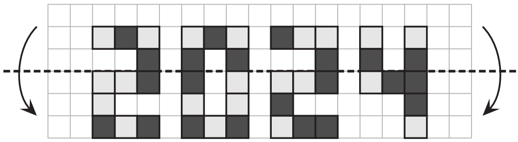
Wer findet in den Bienenwaben alle Zellen, die Honig enthalten?



Klassenstufen 5 und 6

1. Kira hat die Jahreszahl 2024 auf Kästchenpapier gezeichnet. Einige Kästchen hat sie dunkel gefärbt. Dann faltet sie an der gestrichelten Linie:

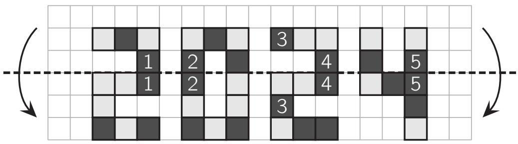
Iran



An wie vielen Stellen liegen nun 2 dunkle Kästchen aufeinander?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 10

Lösung: Wir markieren die dunklen Kästchen, die nach dem Falten aufeinanderliegen. An 5 Stellen liegen jeweils 2 dunkle Kästchen aufeinander.



2. Bastian hüpft auf den quadratischen Platten auf dem Schulhof nach dem rechts gezeichneten Muster. Auf welcher der folgenden Platten wird Bastian <u>nur</u> mit dem rechten Fuss landen?

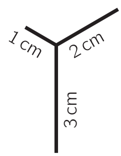
Österreich

(**A**) auf der 14. (**B**) auf der 15. (**C**) auf der 16. (**D**) auf der 17. (**E**) auf der 18.

Lösung: Bastian landet zum ersten Mal nur mit dem rechten Fuss nach „beide Füsse – linker Fuss – beide Füsse“ auf der 4. Platte. Daran schliessen sich wieder „beide Füsse – linker Fuss – beide Füsse“ an, und er ist auf der 8. Platte nur mit dem rechten Fuss. Jede Platte, auf der er nur mit dem rechten Fuss landet, ist mit einer durch 4 teilbaren Zahl nummeriert. Das trifft von den Lösungsvorschlägen nur auf (**C**) zu. Er landet auf der 16. Platte nur mit dem rechten Fuss.

3. Pia möchte mit ihrem roten Stift die Figur rechts in einem Zug ohne abzusetzen nachzeichnen. Sie kann an einer beliebigen Stelle beginnen. Pia möchte so wenig wie möglich doppelt zeichnen.
Wie lang ist dann der Weg, den Pias roter Stift zurücklegen muss?

Deutschland



(**A**) 7 cm (**B**) 8 cm (**C**) 9 cm (**D**) 10 cm (**E**) 11 cm

Lösung: Den „Arm“, mit dem Pia beginnt, und den Arm, mit dem sie endet, muss Pia nur einmal nachzeichnen. Den dritten Arm muss sie zweimal nachzeichnen. Dafür muss sie natürlich den kürzesten Arm mit der Länge 1 cm wählen, um insgesamt einen möglichst kurzen Weg mit dem roten Stift zurückzulegen. Beginnen kann sie mit dem 2-cm-Arm oder dem 3-cm-Arm. In beiden Fällen erhält sie, dass der Weg des Stiftes $2\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 3\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 2\,\text{cm} = 7\,\text{cm}$ lang ist.

4. In unserer Klasse haben wir eine Geheimschrift. Für jeden Buchstaben gibt es ein besonderes Zeichen. Die Namen meiner Freunde Linus und Eva schreiben sich so:  und . Und ich bin Luisa. Wie schreibt sich mein Name?

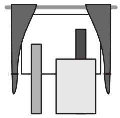
Usbekistan

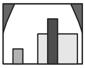
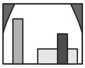
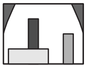
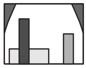
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Buchstaben von „Luisa“ finden wir in den Namen **LI**n**US** und Ev**A**. Bei (**E**) sind die richtigen Zeichen in der richtigen Reihenfolge angegeben: .

5. Fritz baut mit seinem Vater ein Regal. Er hat drei Bretter an das Fenster gelehnt. Wie sieht das von draussen aus?

Schweiz

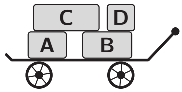


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

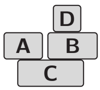
Lösung: Wer von draussen auf die drei Bretter schaut, sieht das einzelne schmale Brett rechts im Fenster und die beiden hintereinanderstehenden Bretter links. Damit fallen die Lösungsmöglichkeiten (**A**) und (**B**) weg. Das lange schwarze Brett steht, von draussen gesehen, vor dem breiten Brett. Damit fällt (**C**) weg. Schliesslich ist bei (**E**) das lange schwarze Brett kürzer als das breite Brett, womit auch (**E**) wegfällt. Von draussen ist (**D**) zu sehen.

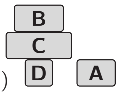
6. Veronika zieht 4 schwere Pakete mit dem Handwagen nach Hause. Dort lädt sie die Pakete eins nach dem anderen ab.
Welcher der folgenden Stapel kann dabei <u>nicht</u> entstehen?

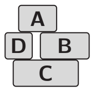
Griechenland

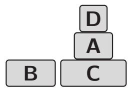


(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

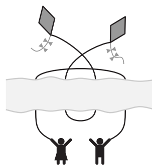
(**D**) 

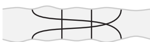
(**E**) 

Lösung: Wir notieren uns die Reihenfolge, in der wir für die einzelnen Antwortmöglichkeiten die Pakete abladen könnten. (**A**): C–D–A–B (**C**): D–C–B–A (**D**): C–D–B–A (**E**): C–A–D–B. Der Stapel bei (**B**) ist nicht möglich, denn das Paket B lässt sich nicht vor dem Paket D aufstapeln.

7. Die Drachen von Natalie und Samir sind schon hoch am Himmel. Da verdeckt ein Wolkenband plötzlich die Sicht auf die beiden Schnüre.
Wie könnten die Schnüre im Wolkenband verlaufen?

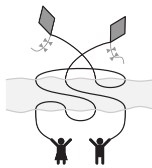
Spanien



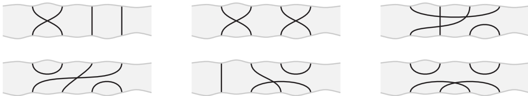
(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

Lösung: Wenn wir die einzelnen Lösungsmöglichkeiten mit den Augen nachverfolgen oder auch einzeichnen, stellen wir fest, dass nur bei (**D**) jedes der beiden Kinder einen Drachen an der Schnur hält.



In Aufgabe 8 könnten die Schnüre im Wolkenband auch ganz anders verlaufen. Welche Schnurverläufe sind ebenfalls möglich?

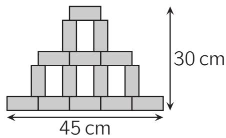


8. Slowakei Im Berghotel „Sorgenfrei“ sind die Zimmer fortlaufend nummeriert. Das erste Zimmer hat die Nummer 1. Runa und Oskar flitzen durch alle Korridore und zählen in allen Zimmernummern die Zweien und die Fünfen. Runa hat 14 Zweien gezählt, und Oskar hat 3 Fünfen gezählt.
Wie viele Zimmer kann das Hotel <u>höchstens</u> haben?

(**A**) 25 (**B**) 26 (**C**) 34 (**D**) 35 (**E**) 41

Lösung: Runa hat die 14 Zweien in den folgenden Zimmernummern entdeckt: 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32. Die nächste Zimmernummer mit einer Zwei wäre die 42. Und Oskar hat die 3 Fünfen in den Zimmernummern 5, 15 und 25 entdeckt. Die nächste Zimmernummer mit einer Fünf wäre die 35. Das Hotel hat also mindestens 32, aber weniger als 35 Zimmer. Es kann demnach höchstens 34 Zimmer haben.

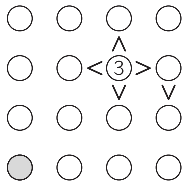
9. Malaysia Hakan hat viele gleiche rechteckige Teile aus Papier. Damit legt er die Figur rechts. Die Figur ist 45 cm breit und 30 cm hoch.
Welche Seitenlängen haben die einzelnen Rechtecke?



(**A**) 9 cm und 5 cm (**B**) 8 cm und 4 cm (**C**) 9 cm und 3 cm
(**D**) 8 cm und 5 cm (**E**) 9 cm und 4 cm

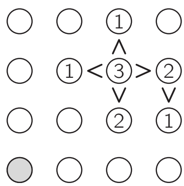
Lösung: Die Figur, die Hakan gelegt hat, ist so breit wie 5 lange Rechtecksseiten zusammen. Also ist jedes Rechteck $45\,\text{cm} : 5 = 9\,\text{cm}$ lang. Die Figur ist so hoch wie 2 lange und 3 kurze Rechtecksseiten zusammen. Folglich sind 3 kurze Rechtecksseiten zusammen $30\,\text{cm} - 2 \cdot 9\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$ lang. Damit ist jede kurze Rechtecksseite $12\,\text{cm} : 3 = 4\,\text{cm}$ lang.

10. Norwegen In die Kreise der Figur sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 eingetragen werden. Dabei soll in jeder Zeile und in jeder Spalte jede der 4 Zahlen genau einmal vorkommen. Das Zeichen $>$ soll stets von der grösseren Zahl mit der Spitze zur kleineren Zahl zeigen. Welche Zahl gehört in den grauen Kreis?



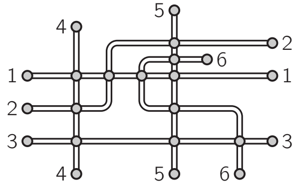
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4
(**E**) Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Lösung: In den Kreis rechts neben der 3 muss die 2 eingetragen werden, da in dem darunterstehenden Kreis eine noch kleinere Zahl einzutragen ist, wofür nur die 1 zur Verfügung steht. Dann muss links von der 3 natürlich die 1 stehen.
In der 3. Spalte brauchen wir für die Kreise über und unter der 3 wieder die Zahlen 1 und 2. Dabei muss in der 1. Zeile die 1 stehen und in der 3. Zeile die 2, weil sich rechts von diesem Kreis bereits eine 1 befindet.
Wir stellen fest, dass in der 1., der 2. und der 3. Zeile bereits eine 1 steht. Die 1, die in die 1. Spalte gehört, kann damit nur im Feld ganz unten, also im grauen Kreis stehen, sie ist die gesuchte Zahl.
Auch die übrigen Kreise lassen sich auf eindeutige Weise ausfüllen.



11. Das Bild zeigt das Bus-Netz von Mittelstadt. Die Linien sollen so gefärbt werden, dass Buslinien, die einander kreuzen, verschiedene Farben haben. Wie viele Farben sind dafür nötig?

Griechenland

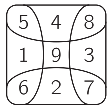


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Die Linien 1 und 3 haben keinen Kreuzungspunkt, sie könnten beide dieselbe Farbe haben, sagen wir rot. Die Linien 4 und 5 haben keinen Kreuzungspunkt, sie könnten beide dieselbe Farbe haben, aber wegen der Kreuzungspunkte mit den Linien 1 und 3 muss sich diese von deren Farbe unterscheiden, sagen wir blau. Die Linien 2 und 6 haben keinen Kreuzungspunkt, sie könnten beide dieselbe Farbe haben, die aber weder rot noch blau sein darf, da es Kreuzungspunkte mit jeweils mindestens einer der roten und blauen Linien gibt, wählen wir also gelb. Mit diesen 3 Farben kommen wir aus. Und da sich zum Beispiel die Linien 1, 2 und 4 gegenseitig kreuzen, klappt es sicher nicht mit weniger als 3 Farben.

12. Eduardo wirft mit drei Steinchen auf die rechts gemalten Felder. Er trifft in drei verschiedene Felder. Die Summe der drei Punktzahlen ist 11.
Welche Differenz können seine grösste und seine kleinste Punktzahl <u>höchstens</u> haben?

Australien



(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Um die Summe 11 zu erzielen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Da wir die grösstmögliche Differenz zwischen der kleinsten und der grössten Punktzahl suchen, probieren wir zuerst, ob es eine Möglichkeit gibt, bei der Eduardo in die Felder mit der 1 und der 9 getroffen hat. Dann wäre die Differenz zwischen der kleinsten und der grössten Punktzahl 8 und die dritte Punktzahl $11 - 1 - 9 = 1$. Dies ist aber nicht möglich, da Eduardo in drei verschiedene Felder getroffen hat.
Wir überlegen, ob die Differenz zwischen der kleinsten und der grössten Punktzahl 7 sein kann. Dann müsste Eduardo in die Felder mit der 2 und der 9 oder mit der 1 und der 8 getroffen haben. Die dritte Punktzahl wäre dann $11 - 2 - 9 = 0$ bzw. $11 - 1 - 8 = 2$. Der erste Fall ist nicht möglich, da es keine 0 gibt. Im zweiten sind die drei Punktzahlen verschieden, dieser Fall ist möglich. Die gesuchte grösstmögliche Differenz ist also 7.

13. Auf dem Tisch liegen drei identische Würfel. Wie gross ist die Summe der drei Zahlen auf den Würfelseiten, die auf dem Tisch liegen?

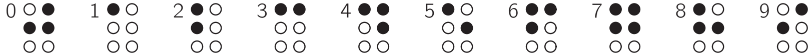
Slowakei

(**A**) 37 (**B**) 43 (**C**) 48 (**D**) 51 (**E**) 54

Lösung: Wenn wir uns auf dem 1. und 3. Würfel anschauen, wie die 22 liegt, erkennen wir, dass die 13 und die 16 einander gegenüber liegen. Auf der Unterseite des 1. Würfels ist folglich die 13, und auf der Unterseite des 3. Würfels die 16. Und wenn wir uns auf dem 2. und 3. Würfel anschauen, wie die 13 liegt, erkennen wir, dass auf der Unterseite des 2. Würfels die 22 ist. Die gesuchte Summe ist folglich $13 + 16 + 22 = 51$.
Hier ist eine weitere Möglichkeit, wie wir die Zahlen auf Unterseiten bestimmen können: Bei jedem Würfel hat jede Würfelseite von den anderen 5 Würfelseiten 4 als Nachbarn und die 5. Würfelseite liegt ihr gegenüber. Die Würfelseite mit der 13 hat die Seiten, auf denen die Zahlen 5, 8, 22 und 24 stehen, als Nachbarn. Ihr gegenüber liegt also die Seite mit der 16. Damit sind die Zahlen auf den Unterseiten des 1. und des 3. Würfels gefunden: 13 und 16. Die Würfelseite mit der 22 hat die Seiten, auf denen die Zahlen 8, 13, 16 und 24 stehen, als Nachbarn. Ihr gegenüber liegt also die Seite mit der 5. Damit ist auch die Zahl auf der Unterseite des 2. Würfels gefunden: 22.

14. Von Louis Braille wurde 1825 eine Schrift für blinde und stark sehbehinderte Menschen entwickelt. Buchstaben und Ziffern können so mit den Fingern ertastet werden. Die folgenden Zeichen werden für die 10 Ziffern benutzt:

Russland



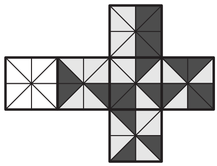
Wie viele 2-stellige Zahlen lassen sich mit genau 4 schwarzen Punkten darstellen?

(**A**) 18 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 26 (**E**) 27

Lösung: Genau 4 schwarze Punkte lassen sich erreichen mit einem Zeichen mit einem schwarzen Punkt und einem mit 3 schwarzen Punkten sowie mit 2 Zeichen mit jeweils 2 schwarzen Punkten, wobei diese Zeichen gleich oder voneinander verschieden sein können.
Mit einem schwarzen Punkt gibt es nur die 1, dazu 0, 4, 6 und 8 mit jeweils 3 Punkten. Hiermit lassen sich die folgenden 2-stelligen Zahlen darstellen: 10, 14, 16, 18 sowie 41, 61 und 81.
Mit 2 schwarzen Punkten gibt es die 2, 3, 5 und 9. Damit lassen sich 22, 23, 25, 29 und 32, 33, 35, 39 und 52, 53, 55, 59 und 92, 93, 95, 99 darstellen.
Insgesamt sind das 23 Zahlen.

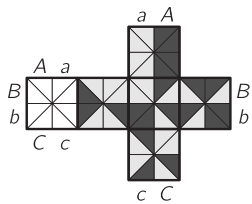
15. Mia möchte aus dem abgebildeten Würfelnetz einen Würfel falten. Je zwei Dreiecke, die an einer Würfelkante aneinanderstossen, sollen die gleiche Farbe haben. Wie muss Mia das linke, noch weisse Quadrat färben?

Deutschland



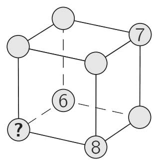
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Dreiecke an der rechten Seite des Quadrats müssen dunkel sein, das ist klar. Um die Farbe der anderen Dreiecke zu finden, stellen wir uns vor, wie der Würfel zusammengefaltet wird. Dabei treffen jeweils die beiden mit *A*, *a*, *B*, *b*, *C* und *c* bezeichneten Kantenabschnitte zusammen. Im Bild können wir nun ablesen, wie die einzelnen Dreiecke gefärbt werden müssen: *A* dunkelgrau, *a* hellgrau, *B* hellgrau, *b* dunkelgrau, *C* hellgrau und *c* dunkelgrau. Also zeigt (**E**), wie das weisse Quadrat gefärbt werden muss.



16. An drei der Würfelecken stehen die Zahlen 6, 7 und 8. Es sollen die Zahlen von 1 bis 5 so ergänzt werden, dass die Summen der 4 Eck-Zahlen jeder Würfelseite gleich sind. Für welche Zahl steht das Fragezeichen?

Spanien

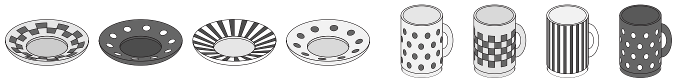


(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Wir überlegen zuerst, welche Summe wir auf jeder Würfelseite finden. Die Summe aller 8 Zahlen ist $1+2+\ldots+8 = (1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5) = 4\cdot 9 = 36$. Da die 8 Zahlen auf die Ecken der oberen und der unteren Würfelseite verteilt sind, haben die 4 Eck-Zahlen dieser beiden Würfelseiten jeweils die Summe $36 : 2 = 18$. Das ist folglich die Summe der 4 Eck-Zahlen jeder Würfelseite.
Da auf der Würfelseite rechts vorn die Summe $8 + 7 = 15$ bereits feststeht, muss an einer der beiden anderen Ecken die 1 und an der anderen die 2 sein, weil nur so die Summe 18 erzielt werden kann.
Von der unteren Würfelseite steht ebenfalls ein Teil der Summe bereits fest: $6 + 8 = 14$. Die Summe der Zahlen an den beiden noch nicht festgelegten Ecken ist also 4. Von den beiden Möglichkeiten $4 = 2 + 2$ und $4 = 1 + 3$ entfällt die erste, da alle Eck-Zahlen verschieden sind. Und da für die Ecke ohne Fragezeichen nur 1 oder 2 möglich ist, erhalten wir, dass das Fragezeichen für die Zahl 3 steht.

17. Deutschland

Shirley deckt den Tisch. Wie üblich stellt sie die 4 Tassen zufällig auf die 4 Untertassen, ohne auf die passenden Muster zu achten. Welche Aussage ist dann gewiss richtig?



(**A**) Es ist sicher, dass keine der 4 Tassen auf ihrer passenden Untertasse steht.

(**B**) Es ist sicher, dass genau eine Tasse auf ihrer passenden Untertasse steht.

(**C**) Es ist nicht möglich, dass genau 2 Tassen auf ihrer passenden Untertasse stehen.

(**D**) Es ist nicht möglich, dass genau 3 Tassen auf ihrer passenden Untertasse stehen.

(**E**) Es ist nicht möglich, dass alle 4 Tassen auf ihrer passenden Untertasse stehen.

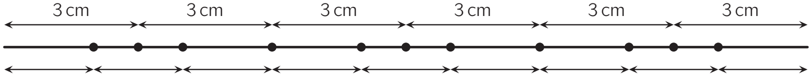
Lösung: Da zu jeder Untertasse eine passende Tasse existiert, ist es natürlich möglich, alle Tassen richtig zuzuordnen. Damit entfällt die Antwortmöglichkeit (**E**), aber es entfallen auch (**A**) und (**B**). Vertauscht man in der komplett richtigen Zuordnung 2 Tassen, dann stehen genau 2 Tassen auf ihren passenden Untertassen. Genau 2 richtige Zuordnungen sind also möglich und somit entfällt auch (**C**). Allerdings ist es unmöglich, dass genau 3 Tassen auf ihren passenden Untertassen stehen, denn für die 4. Tasse wäre ja nur genau eine, und zwar die passende Untertasse, übrig. Aussage (**D**) ist die gesuchte.

18. Israel

Die Fadenfressermotten Fa, Mo und Tzz finden einen Faden. Fa will den Faden in 6 gleich lange Stücke teilen und markiert die Teilungspunkte. Mo will ihn in 9 gleich lange Stücke teilen und markiert auch die Teilungspunkte. Tzz zerbeisst den Faden an <u>allen</u> markierten Stellen. Wie viele Stücke sind es am Ende?

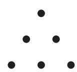
(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Die Aufgabe lässt sich lösen, indem wir einen Faden zeichnen und säuberlich die Teilungspunkte markieren, sodass 6 bzw. 9 gleich lange Stücke entstehen. Hier ist das mit einem Faden der Länge 18 cm getan:



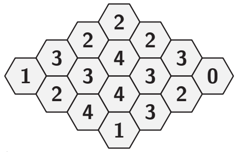
Am Ende sind es 12 Stücke. – Wer rechnet, weiss allerdings besser, warum manche Teilungspunkte zusammenfallen. Es liegt daran, dass 6 und 9 einen gemeinsamen Teiler, die 3, haben. Und das geht so: Um den Faden in 6 gleich lange Stücke zu teilen, muss Fa 5 Punkte auf dem Faden markieren, und zwar nach $\frac{1}{6}$ des Fadens, nach $\frac{2}{6}$ des Fadens usw. Mo muss für 9 gleich lange Stücke 8 Punkte des Fadens markieren, und zwar nach $\frac{1}{9}$ des Fadens, nach $\frac{2}{9}$ des Fadens usw. Da $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ gilt, fallen diese beiden Markierungen zusammen. Das trifft ebenso zu für $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$. Da zwei Markierungen nur dann zusammenfallen, wenn die zugehörigen Brüche in gekürzter Form gleich sind, kann das nur passieren, wenn die gekürzten Brüche als Nenner einen gemeinsamen Teiler von 6 und 9 haben. Es kommen hierfür nur $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ in Frage. Das heisst, es fallen keine weiteren Markierungen zusammen. Von den $5 + 8 = 13$ Markierungen fallen 2 zusammen. Damit sind es 11 Markierungen, an denen Tzz den Faden zerbeisst, also 12 Stücke.

Wie viele Geraden gibt es, die durch genau zwei der sechs abgebildeten Punkte verlaufen?



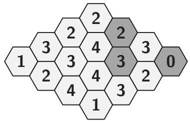
19. Einige Zellen der Bienenwabe enthalten Honig. Die Zahl in jeder Zelle gibt an, wie viele ihrer Nachbarzellen Honig enthalten.
Wie viele Zellen in dieser Bienenwabe enthalten Honig?

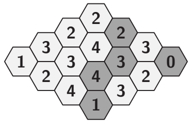
Türkei

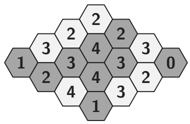


(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Wir wollen Zelle für Zelle herausfinden, ob in dieser Honig ist oder nicht. Zellen, die Honig enthalten, malen wir dunkel. Es gibt verschiedene Vorgehensweisen. Wir beginnen bei der Zelle, deren Nachbarn keinen Honig enthalten, also bei der 0 ganz rechts in der 7. Spalte. Wir finden, dass die beiden Zellen in der 6. Spalte keinen Honig enthalten. Nun bemerken wir, dass die Zelle mit der 3 in der 6. Spalte 4 Nachbarzellen hat. Von diesen enthält die Zelle direkt unter der 3 keinen Honig. Folglich müssen die 3 anderen Nachbarzellen Honig enthalten (Bild oben). Für die Zelle mit der 2 in der 6. Spalte sind damit die beiden Zellen, die Honig enthalten, klar. Außerdem ist klar, dass die unterste Zelle in der 5. Spalte mit der 3 keinen Honig enthält.







Die nächste Zelle, bei der wir für alle benachbarten Zellen entscheiden können, ob sie Honig enthalten oder nicht, ist die unterste Zelle in der 5. Spalte mit der 3. Diese hat 4 Nachbarzellen, wovon nur die mit der 2 in der 6. Spalte keinen Honig enthält (Bild Mitte). Insbesondere enthält die Zelle über der 1 in der 4. Spalte Honig. Also kann die Zelle mit der 4 in der 3. Spalte keinen Honig enthalten.
Wir führen die Überlegungen in der beschriebenen Weise fort und finden schliesslich, dass genau 9 Zellen Honig enthalten (Bild unten).

— *Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 3/4 die Aufgabe 17.* —

20. In den Ferien sind alle Enkel bei den Grosseltern. Die Grossmutter staunt über die viele Wäsche. Werden die Wäscheklammern reichen? Sie will immer ein Paar Socken mit jeweils einer Klammer aufhängen. So bleiben aber 7 Paar Socken übrig. Also hängt sie immer 3 Socken mit einer Klammer auf. Und das geht genau auf. Wie viele Socken hat sie gewaschen?

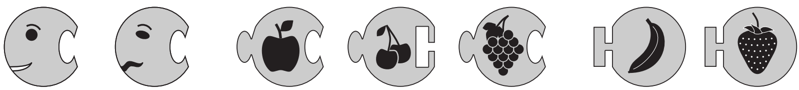
Estland

(**A**) 42 (**B**) 36 (**C**) 32 (**D**) 30 (**E**) 26

Lösung: Wir stellen uns vor, dass mit jeder Klammer ein Paar Socken an der Leine hängt. Übrig sind 7 Paare, also 14 Socken. Hängen wir je eine Socke bei jeder Klammer dazu, so hängen mit jeder Klammer 3 Socken an der Leine. Da nun keine Socken mehr übrig sind, sind es genau 14 Klammern mit je 3 Socken. Insgesamt sind es somit $14 \cdot 3 = 42$ Socken.

21. Richard will aus insgesamt 3 oder 4 oder 5 Teilen eine Raupe mit Kopf und Endstück legen.

Deutschland



Wie viele verschiedene Raupen kann Richard nach diesen Regeln puzzeln?

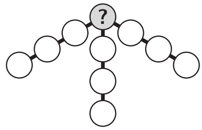
(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 20

Lösung: Wir beachten, dass es zwei Sorten von Ausbuchtungen gibt: runde und eckige. An die 2 Köpfe passen alle 3 Mittelteile, an die 2 Endstücke passt jedoch nur das 2. Mittelteil. Für Raupen aus 3 Teilen können wir jeden der 2 Köpfe mit dem 2. Mittelteil und jedem der 2 Endstücke kombinieren. Das sind $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ verschiedene Raupen. Für Raupen aus 4 Teilen kann zwischen den Kopf und das 2. Mittelteil das 1. oder das 3. Mittelteil eingefügt werden. Das sind $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verschiedene Raupen. Für Raupen aus 5 Teilen müssen zwischen den Kopf und das 2. Mittelteil das 1. und das 3. Mittelteil eingefügt werden, wofür es 2 verschiedene Reihenfolgen gibt. Dadurch ergeben sich noch einmal

$2\cdot2\cdot2 = 8$ verschiedene Raupen. Insgesamt kann Richard $4+8+8 = 20$ verschiedene Raupen puzzeln.
— Ein ähnliches, etwas leichteres Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 13 zu lösen. —

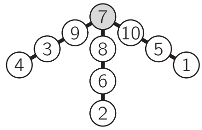
22. Griechenland

Maira will die Zahlen von 1 bis 10 so in die 10 Kreise eintragen, dass in jedem der 3 „Arme" der Figur die Summe der 4 Zahlen 23 ist.
Welche Zahl muss sie dazu in den grauen Kreis schreiben?



(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Wenn wir die 4 Zahlen im ersten Arm, die 4 Zahlen im zweiten Arm und die 4 Zahlen im dritten Arm alle addieren, erhalten wir $3 \cdot 23 = 69$. Dabei haben wir alle Zahlen von 1 bis 10 einmal addiert und die Zahl, die in den grauen Kreis gehört, zusätzlich noch zweimal, denn wir haben sie ja insgesamt dreimal mitgerechnet. Die Summe der Zahlen von 1 bis 10 errechnen wir zu $(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) = 5\cdot 11 = 55$. Das Doppelte der gesuchten Zahl ist also $69 - 55 = 14$, und die gesuchte Zahl demzufolge $14 : 2 = 7$.
Dass sich die Figur mit der 7 im grauen Kreis auch regelgerecht ausfüllen lässt, zeigt das Beispiel.



23. Mexiko

Hannes hilft manchmal bei seinen Eltern im Restaurant. Heute bekommt er eine Kiste voller Servietten und soll sie auf die Serviettenhalter verteilen. Er steckt 20 Servietten in jeden Serviettenhalter. Nun sind noch 12 Servietten in der Kiste. Diese 12 Servietten reichen nicht aus, um in jeden Serviettenhalter noch einmal eine Serviette zu stecken.
Wie viele Servietten könnten am Anfang in der Kiste gewesen sein?

(**A**) 198 (**B**) 232 (**C**) 288 (**D**) 362 (**E**) 432

Lösung: Nachdem Hannes ein Vielfaches von 20 an Servietten verteilt hat, bleiben 12 Servietten übrig, die nicht mehr ausreichen, um in jeden Serviettenhalter eine weitere Serviette zu stecken. Also sind es mehr als 12 Serviettenhalter. Die Zahl der Servietten ist folglich eine Zahl der Form „Vielfaches von 20 plus 12", die grösser als $12\cdot20+12 = 252$ ist. Die Zahlen 288, 362 und 432 sind grösser als 252, aber 288 und 362 sind nicht von der Form „Vielfaches von 20 plus 12", denn weder $288 - 12 = 276$ noch $362 - 12 = 350$ sind Vielfache von 20. Das trifft allein für $432 = 21 \cdot 20 + 12$ zu.

24. Spanien

Kristina schreibt in ihr Tagebuch eine 3-stellige Zahl. So viele Kilometer ist sie in den Ferien Rad gefahren. Ihr grosser Bruder hängt rechts eine Ziffer an. Das ist nun die Anzahl Kilometer, die er geschafft hat. Er ist 2024 Kilometer mehr gefahren als Kristina. Welche Ziffer hat er angehängt?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Kristina schreibt die Zahl ABC, wobei A, B und C die Ziffern sind. Ihr grosser Bruder hängt eine Ziffer, die wir D nennen, an Kristinas Zahl rechts an, wodurch ihre Zahl um 2024 wächst. Also gilt $ABC + 2024 = ABCD$. Wir schreiben diese Rechnung in Form einer schriftlichen Addition und ermitteln schrittweise die Ziffern A, B, C, D.

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 0 & 2 & 4 \\ + & & A & B & C \\ \hline & A & B & C & D \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 2 & 0 & 2 & 4 \\ + & & 2 & B & C \\ \hline & 2 & B & C & D \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 2 & 0 & 2 & 4 \\ + & & 2 & 2 & C \\ \hline & 2 & 2 & C & D \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 2 & 0 & 2 & 4 \\ + & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 2 & 4 & D \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 2 & 0 & 2 & 4 \\ + & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

Die Ziffer A kann nur 2 oder 3 sein, wobei 3 nicht möglich ist, da es von der Hunderterstelle keinen Übertrag gibt. Also ist $A = 2$.
Die Ziffer B kann nur 2 oder 3 sein, wobei auch hier 3 nicht möglich ist, da es von der Zehnerstelle keinen Übertrag gibt. Also ist $B = 2$.
Nun sehen wir, dass die Ziffer C nur 4 oder 5 sein kann. C kann nicht 5 sein, da es von der Einerstelle keinen Übertrag gibt. Damit ist $C = 4$ und folglich $D = 8$. Kristinas Bruder hat eine 8 angehängt.

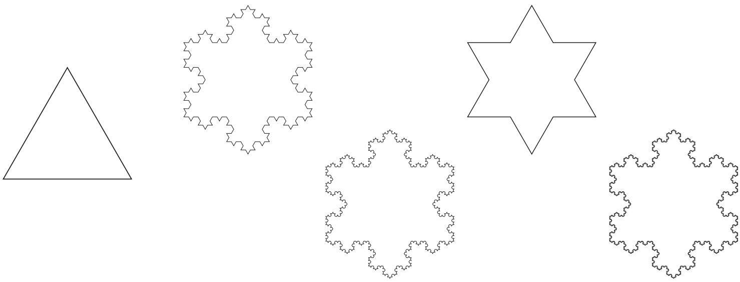
Zwei einfache Fraktale

Auf der Titelseite der Broschüre ist ein *Fraktal* zu sehen, und was das ist, ist auf der Rückseite erklärt. Hier schauen wir uns zwei einfache Beispiele an: die *Kochsche Schneeflocke* und das *Sierpinski-Dreieck*. Beide entstehen schrittweise nach einer einfachen Regel. Die eigentliche Schneeflocke bzw. das eigentliche Sierpinski-Dreieck erhalten wir in unserer Vorstellung, wenn wir die Regel unendlich oft anwenden würden. Die unendlich feine, sich wiederholende Struktur können wir aber schon nach wenigen Schritten erahnen.

Die Kochsche Schneeflocke

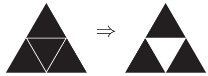
Wir starten mit einem gleichseitigen Dreieck. In jedem Schritt ersetzen wir wie rechts im Bild jede Strecke durch 4 neue Strecken. Dabei haben die 4 neuen Strecken jeweils ein Drittel der Länge der alten und die beiden mittleren zeigen als Spitze nach aussen. Schritt für Schritt entsteht so aus dem Dreieck eine immer feiner werdende Schneeflocke.

In welcher Reihenfolge sind die Bilder entstanden?



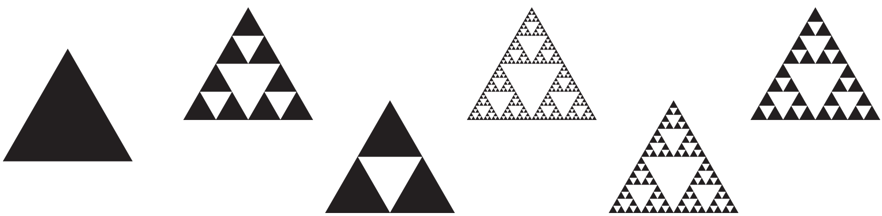
Aus wie vielen Strecken bestehen die Schneeflocken in den einzelnen Schritten?
Wer findet eine Regel, mit der man das ausrechnen kann anstatt zu zählen?

Das Sierpinski-Dreieck



Wir starten mit einem schwarz ausgefüllten Dreieck. In jedem Schritt teilen wir wie rechts im Bild jedes schwarze Dreieck in 4 kleinere gleichseitige Dreiecke und entfernen von diesen das mittlere. Schritt für Schritt entsteht so eine immer feiner werdende Struktur aus kleinen schwarzen Dreiecken.

In welcher Reihenfolge sind die Bilder entstanden?

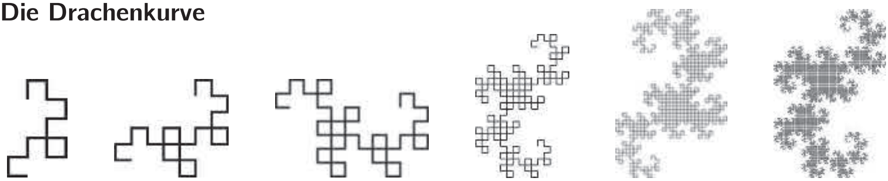


Wie viele schwarze Dreiecke sind es jeweils nach dem 1., 2., 3., 4. und 5. Schritt?
Wer findet eine Regel, mit der man das ausrechnen kann anstatt zu zählen?

Fraktale falten

Auch durch einfaches Falten können Fraktale entstehen! Nimm einen langen Papierstreifen zur Hand, zum Beispiel von einem DIN-A4-Blatt, und falte eine *Drachenkurve* oder eine *Pfeilspitzen-Kurve*.

Die Drachenkurve



4. Ordnung 5. Ordnung 6. Ordnung 8. Ordnung 10. Ordnung 14. Ordnung

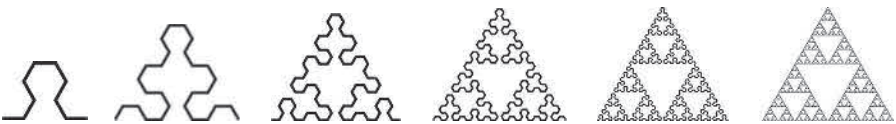
So erhalten wir eine Drachenkurve 4. Ordnung:

1. Falte den Papierstreifen einmal in der Mitte, sodass der entstehende Streifen genau halb so lang ist wie der Streifen zu Beginn.
2. Wiederhole Schritt 1 sooft, dass du insgesamt 4-mal gefaltet hast. Achte dabei darauf, dass du immer in dieselbe Richtung faltest, und streiche die Kanten stets ordentlich glatt.
3. Falte den Papierstreifen nun langsam auseinander. Zieh den Streifen so zurecht, dass an jeder Faltlinie ein rechter Winkel ist.
4. Stell den aufgefalteten Streifen seitlich hin und voilà: Fertig ist die Drachenkurve 4. Ordnung!

Achte darauf, dass wie in der Abbildung oben ein Quadrat zu sehen ist. Wenn die Kanten der Kurve im Vergleich zur Abbildung etwas auseinander stehen, falte sie nochmal nach. Wer das Papier auf die andere Seite stellt, erhält eine spiegelbildliche Version der Kurve, wie sie oben abgebildet ist.

Für die Drachenkurve 5. Ordnung muss 5-mal gefaltet werden. Höhere Ordnungen sind schwierig zu falten. Eine Drachenkurve 6. Ordnung lässt sich jedoch auch aus zwei Drachenkurven 5. Ordnung zusammensetzen. Mit dem Computer lassen sich Drachenkurven höherer Ordnung zeichnen.

Die Pfeilspitzen-Kurve



2. Ordnung 3. Ordnung 4. Ordnung 5. Ordnung 6. Ordnung 9. Ordnung

So erhalten wir eine Pfeilspitzen-Kurve 3. Ordnung:

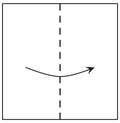
1. Falte die beiden äusseren Drittel des Papierstreifens auf das mittlere Drittel. Es kann hilfreich sein, sich vorher die Linien zu markieren, an denen der Streifen gefaltet werden muss.
2. Führe Schritt 1 insgesamt 3-mal aus. Streiche die Kanten immer ordentlich glatt.
3. Falte den Papierstreifen nun langsam auseinander. Zieh den Steifen so zurecht, dass an jeder Faltlinie ein 120-Grad-Winkel ist.
4. Stell den aufgefalteten Streifen seitlich hin und voilà: Fertig ist die Pfeilspitzen-Kurve 3. Ordnung!

Höhere Ordnungen als die 3. Ordnung sind schwierig zu falten. Eine Pfeilspitzen-Kurve 4. Ordnung lässt sich jedoch aus drei Pfeilspitzen-Kurven 3. Ordnung zusammensetzen. Mit dem Computer lassen sich Pfeilspitzen-Kurven höherer Ordnung zeichnen, und überraschenderweise können wir dabei ein anderes bekanntes Fraktal wiederentdecken.

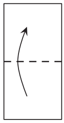
Servietten-Bastelei

Hier ist eine praktische Faltübung für den Esstisch, angeregt durch Aufgabe 23 aus Klassenstufe 5/6. Es gibt viele, mitunter aufwendige Varianten, Servietten dekorativ zu falten. Wir stellen zwei einfache Möglichkeiten vor, und zwar eine Tasche, in der sich praktischerweise das Besteck verstauen lässt, und eine hübsche Lilie. Wir starten jeweils mit einer ausgebreiteten Serviette.

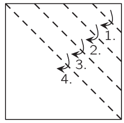
So falten wir die Bestecktasche:



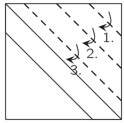
An der gestrichelten Linie die linke Kante auf die rechte Kante klappen.



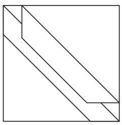
An der gestrichelten Linie die untere Kante auf die obere Kante klappen.



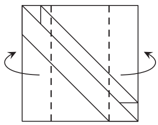
Die oberste Lage an den 4 gestrichelten Linien nacheinander nach unten falten.



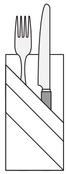
Und nun die zweite Lage an den 3 gestrichelten Linien nach unten falten.



Die zweite Lage unter die erste Lage stecken.

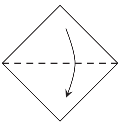


Zum Schluss das linke Viertel und das rechte Viertel nach hinten umklappen.

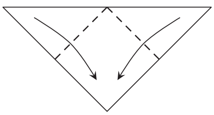


Fertig ist die Tasche.

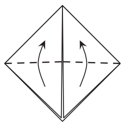
Und hier ist die Falt-Anleitung für die Lilie:



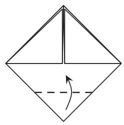
An der gestrichelten Linie die obere Ecke auf die untere Ecke klappen.



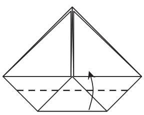
An den gestrichelten Linien die beiden oberen Ecken auf die untere Ecke klappen.



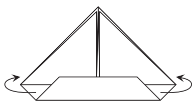
An den gestrichelten Linien die beiden unteren Ecken nach oben klappen.



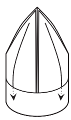
Die untere Ecke in die Mitte klappen.



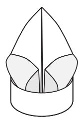
An der gestrichelten Linie die untere Kante nach oben falten.



Die Serviette aufrollen, sodass die untere Kante einen Kreis bildet. Dann die beiden Ecken hinten zusammenstecken und mit einer Büroklammer fixieren.

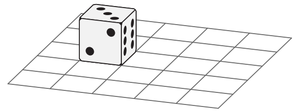


Die vorderste Lage der oberen Ecke nach unten wölben und in die Falte stecken.



Fertig ist die Lilie.

Das Würfel-Kipp-Problem

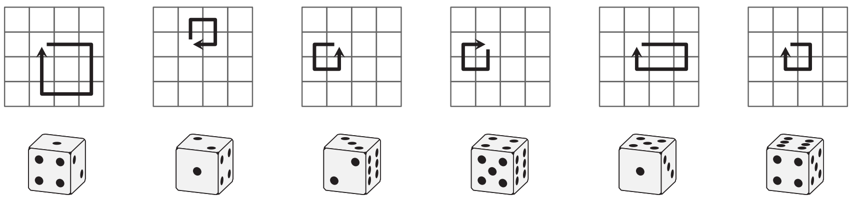


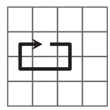
In Klassenstufe 7/8 wurde in Aufgabe 13 ein Spielwürfel auf einem passenden Spielfeld bewegt, indem er über seine Kanten gekippt wurde. Wir wollen untersuchen, wie der Würfel liegen kann, wenn er nach mehrmaligem Kippen wieder zum Startfeld zurückkehrt.

Zuerst stellen wir fest, dass es $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten gibt, wie der Würfel auf einem der Kästchen liegen kann, je nachdem welche der 6 Augenzahlen oben liegt und welche der 4 benachbarten Augenzahlen nach vorn zeigt. Aber ist jeder dieser Möglichkeiten auch für die Endposition möglich?

Wir starten mit dem Würfel, wie er oben abgebildet ist. Durch Probieren finden wir für jede der Augenzahlen von 1 bis 6 einen möglichen Rundweg, sodass der Würfel wieder auf dem Startfeld zu liegen kommt und die jeweilige Augenzahl oben liegt. Da auf einem Spielwürfel die Summe von zwei gegenüberliegenden Augenzahlen stets 7 ist, kennen wir stets auch die Augenzahlen der nicht sichtbaren Seiten.

Ordne die Zugfolgen den Endpositionen des Würfels zu:

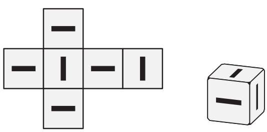




Kippen wir den Würfel entlang des rechts abgebildeten Weges, so liegt die Zahl, die zu Beginn oben war, auch am Ende wieder oben. Die Zahlen auf der vorderen und auf der hinteren Seitenfläche sind allerdings vertauscht. Ebenso sind die Zahlen auf der linken und der rechten Seitenfläche vertauscht.

Kippen wir also den Würfel zuerst wie in den Zugfolgen oben angegeben und anschließend wie rechts, so ergeben sich die folgenden 6 Ausrichtungen.

Nun haben wir schon insgesamt 12 verschiedene Möglichkeiten gefunden, wie der Würfel liegen kann, wenn er wieder auf seinem Startfeld ankommt. Und tatsächlich sind dies auch schon alle. Die restlichen 12 Ausrichtungen, wie der Würfel grundsätzlich liegen kann, sind als Endposition nicht möglich.

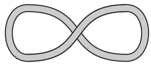


Das erkennen wir, indem wir auf die Seitenflächen des Würfels nicht Zahlen sondern wie links abgebildet abwechselnd senkrechte und waagerechte Striche zeichnen. Wenn wir den so markierten Würfel kippen, ist auf der oberen Seitenfläche abwechselnd ein senkrechter und ein waagerechter Strich zu sehen.

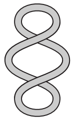
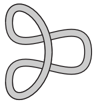
Damit der Würfel am Ende wieder auf dem Startfeld liegt, muss er genauso oft nach rechts wie nach links gekippt werden, und er muss genauso oft nach vorne wie nach hinten gekippt werden. Das heißt, der Würfel muss eine gerade Anzahl an Malen gekippt werden. Also ist am Ende der Strich, der oben liegt, genauso ausgerichtet wie zu Beginn. Es können höchstens die vordere und die hintere Seitenfläche und damit auch die linke und die rechte Seitenfläche vertauscht liegen. Mehr ist nicht möglich, und folglich lässt sich der Würfel nicht in die anderen 12 Ausrichtungen bringen, da diese jeweils durch eine Vierteldrehung aus einer der oben abgebildeten, möglichen Ausrichtungen hervorgehen.

Klassenstufen 7 und 8

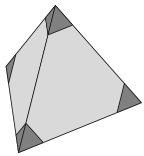
1. Welche der folgenden Schnüre kann nicht so gelegt werden wie die Schnur rechts, ohne sie zu zerschneiden?



Deutschland

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Schnur rechts lässt sich zu einem geschlossenen, nicht verdrehten Ring entwirren. Das ist auch bei den Schnüren bei (**A**), (**C**), (**D**) und (**E**) möglich. Die Schnur bei (**B**) kann nicht so gelegt werden, da ein Knoten entsteht, wenn wir an einer der drei Schlaufen ziehen.



2. Julio schneidet wie abgebildet die vier Ecken eines Tetraeders ab. Wie viele Ecken hat der Körper, der übrig bleibt?

Deutschland

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Durch das Abschneiden werden die 4 Ecken des Tetraeders entfernt und an jeder Schnittfläche entstehen 3 neue Ecken. Der Körper, der übrig bleibt, hat also $4 \cdot 3 = 12$ Ecken.

3. $(20 \cdot 24) : (2 \cdot 0 + 2 \cdot 4) =$

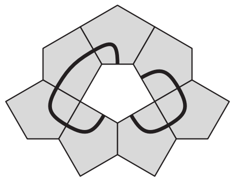
Uganda

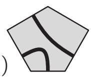
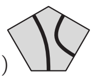
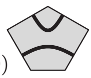
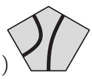
(**A**) 12 (**B**) 30 (**C**) 48 (**D**) 60 (**E**) 120

Lösung: Es ist $(20 \cdot 24) : (2 \cdot 0 + 2 \cdot 4) = 20 \cdot 24 : 8 = 20 \cdot 3 = 60$.

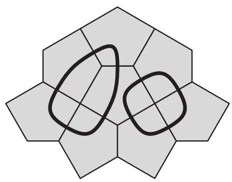
4. Welches der folgenden Teile passt so in die Mitte des Puzzles, dass dabei zwei geschlossene Linien entstehen?

Slowenien



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Teile passen in die Mitte des Puzzles, wenn sie auf den Kopf gedreht werden. Nur das Teil bei (**E**) hat links einen Bogen um eine Ecke und rechts einen längeren Bogen um zwei Ecken, sodass die beiden angefangenen Linien im Puzzle geschlossen werden.



5. Das Maximalgewicht, das der Aufzug in der Jugendherberge tragen kann, ist mit 12 Erwachsenen oder mit 20 Kindern erreicht. Wie viele Kinder dürfen den Aufzug zusammen mit 9 Erwachsenen benutzen?

Ukraine

(**A**) höchstens 3 (**B**) höchstens 4 (**C**) höchstens 5 (**D**) höchstens 6 (**E**) höchstens 7

Lösung: Wenn 9 Erwachsene mit dem Aufzug fahren, sind drei Viertel des Maximalgewichts, das der Aufzug tragen kann, erreicht. Ein Viertel des Maximalgewichts bleibt dann für Kinder. Also können noch $20 : 4 = 5$ Kinder mitfahren.

6. Familie Backe hat für nächsten Donnerstag fünf Termine beim Zahnarzt vereinbart. Sie haben in einer Tabelle angekreuzt, wer zu welchen Terminen Zeit hat. Tatsächlich können die fünf Termine für alle passend aufgeteilt werden. Wann wird Nils an der Reihe sein?

Schweiz

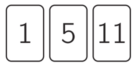
	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
Anne		×			
Nils	×	×	×	×	
Caro	×		×	×	×
Mama		×	×	×	
Papa		×	×		

(**A**) 13:00 (**B**) 14:00 (**C**) 15:00 (**D**) 16:00 (**E**) 17:00

Lösung: Wer erkennt, dass der Termin um 17:00 Uhr nur für Caro passt, der sieht schnell, dass der Termin um 13:00 Uhr dann nur für Nils passt. Also ist Nils um 13:00 Uhr an der Reihe.
Wer eher auf die Personen schaut als auf die Termine, sieht zuerst, dass Anne den Termin um 14:00 Uhr bekommen muss. Dann muss Papa den Termin um 15:00 Uhr und Mama den Termin um 16:00 Uhr bekommen. Somit ist Nils um 13:00 Uhr an der Reihe und Caro um 17:00 Uhr.

7. Margarethe möchte mit den drei abgebildeten Karten vierstellige Zahlen legen. Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen sind möglich?

Niederlande

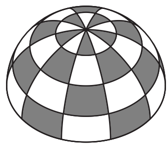


(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Margarethe kann die Karte mit der 5 nach links, in die Mitte oder nach rechts legen. Liegt die 5 links, entsteht die Zahl 5111, egal in welcher Reihenfolge die beiden anderen Karten liegen. Liegt die 5 in der Mitte, entsteht die Zahl 1511 oder die Zahl 1151, je nachdem in welcher Reihenfolge die beiden anderen Karten liegen. Liegt die 5 rechts, entsteht die Zahl 1115, egal in welcher Reihenfolge die beiden anderen Karten liegen. Es sind 4 Zahlen möglich.

8. Elizas rundes Zelt ist rundherum gleichmässig gemustert. Die einzelnen Flächen sind abwechselnd weiss und grau. Wie viele graue Flächen hat Elizas Zelt?

Griechenland



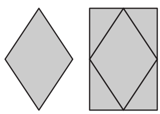
(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 22 (**D**) 25 (**E**) 27

Lösung: Von den 10 Flächen oben in der Mitte sind 5 grau und 5 weiss. Da die einzelnen Flächen auf dem Zelt abwechselnd grau und weiss sind, gibt es ebenso in jedem der 3 Ringe, die rund um das Zelt führen, 5 graue und 5 weisse Flächen. Daher sind es insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ graue Flächen.

Wie viele 4-stellige Zahlen bestehen wie die Jahreszahl 2024 aus 4 geraden Ziffern, die in der Summe 8 ergeben?

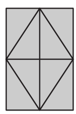
9. An einen Rhombus wurden vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke angelegt. So ist ein Rechteck entstanden. Um wie viel Prozent ist die Fläche des Rechtecks grösser als die Fläche des Rhombus?

Spanien



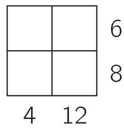
(**A**) um 40 % (**B**) um 60 % (**C**) um 75 % (**D**) um 80 % (**E**) um 100 %

Lösung: Wir können das Rechteck in 8 kongruente Dreiecke zerlegen. Von diesen gehören 4 zum Rhombus. Zum Rechteck gehören 4 Dreiecke mehr als zum Rhombus. Die Fläche des Rechtecks ist damit um 100 % grösser als die Fläche des Rhombus.



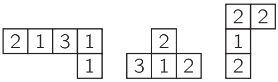
10. In die Kästchen der Figur rechts sollen <u>vier verschiedene</u> natürliche Zahlen eingetragen werden. Neben jeder Zeile und unter jeder Spalte ist angegeben, welches Produkt die beiden Zahlen in der jeweiligen Zeile bzw. Spalte haben sollen. Wie gross ist die Summe der vier Zahlen, die einzutragen sind?

Australien



(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

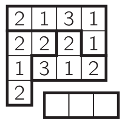
Lösung: Wir beginnen mit der linken Spalte. Die einzige Möglichkeit, die 4 ohne Beachtung der Reihenfolge als Produkt von zwei verschiedenen natürlichen Zahlen zu schreiben, ist $4 = 1 \cdot 4$. Somit müssen wir in die linke Spalte eine 1 und eine 4 eintragen. Die 4 kann nicht im oberen Kästchen stehen, da 4 kein Teiler von 6 ist. Also steht im Kästchen oben links die 1, unten links die 4 und folglich oben rechts $6 : 1 = 6$ und unten rechts $8 : 4 = 2$. Damit ist auch das Produkt in der rechten Spalte wie gefordert $6 \cdot 2 = 12$. Die vier einzutragenden Zahlen haben die Summe $1 + 4 + 6 + 2 = 13$.

11. Aus den drei Teilen  und einem weiteren Teil kann ein 4×4-Quadrat gelegt werden, bei dem die Summe der Zahlen in jeder der vier Zeilen und in jeder der vier Spalten dieselbe ist. Wie sieht das vierte Teil aus?

Deutschland

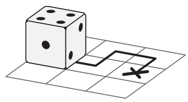
(**A**) 2 1 0 (**B**) 1 2 1 (**C**) 1 1 3 (**D**) 2 2 3 (**E**) 0 3 2

Lösung: Die drei gegebenen Teile können nur auf eine Weise so zusammengelegt werden, dass eines der Teile aus den Antwortmöglichkeiten Platz hat (siehe Bild). Im ersten der gegebenen Teile ist eine vollständige Zeile mit der Summe $2+1+3+1 = 7$ enthalten. Also ist im fertigen 4×4-Quadrat die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte 7. Damit die Summe der Zahlen in der 2., 3. und 4. Spalte 7 ist, müssen auf dem vierten Teil 1, 1 und 3 stehen. Das gesuchte Teil ist also das Teil bei (**C**).



12. Auf einem Spielwürfel ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Augenzahlen stets 7. Jamie bewegt den Würfel auf dem gezeichneten Weg, indem er ihn über seine Kanten kippt. Am Anfang ist die 4 oben. Welche Augenzahl ist oben, wenn der Würfel am Ende des Weges angelangt ist?

Spanien



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Diese Aufgabe lässt sich gut lösen, indem wir den Weg des Würfels rückwärts verfolgen. Die Augenzahl, die am Ende oben liegt, lag vor dem vierten Kippen hinten. Vor dem dritten Kippen lag sie ebenfalls hinten. Vor dem zweiten Kippen lag sie oben. Folglich lag sie vor dem ersten Kippen links und damit gegenüber der 2. Die gesuchte Zahl ist also die 5.
Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir uns von vorn beginnend entlang des Weges überlegen, wie der Würfel nach jedem Kippen ausgerichtet ist.

Wer wissen will, wie der Würfel in Aufgabe 12 liegen kann, wenn er zurück auf sein Startfeld gekippt wird, findet auf Seite 25 die Antwort auf diese Frage.

13. Maria, Yegor und Leela stellen sich vor, wie sie in der Zukunft mit selbstfliegenden Flugtaxis fliegen. Angenommen, es gäbe ein rotes und ein blaues Flugtaxi, in denen jeweils 2 Personen Platz haben. Wie viele Möglichkeiten gäbe es für die Drei, sich auf die beiden Flugtaxis aufzuteilen?

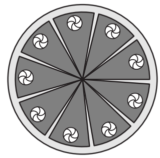
Saudi-Arabien

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 9

Lösung: Wenn sich Maria, Yegor und Leela auf die zwei Flugtaxis aufteilen, fliegt immer genau einer der Drei allein. Die beiden anderen fliegen mit dem anderen Flugtaxi. Es gibt 3 Möglichkeiten dafür, dass mit dem roten Flugtaxi einer allein fliegt, und ebenso 3 Möglichkeiten dafür, dass mit dem blauen Flugtaxi einer allein fliegt. Das sind insgesamt $3 + 3 = 6$ Möglichkeiten.

14. Denise hat einen Kuchen gebacken und ihn in 10 gleich grosse Stücke geschnitten. Ein Stück hat sie gleich aufgegessen. Die übrigen Stücke hat sie so angeordnet, dass die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich gross sind. Wie gross ist jeweils der Winkel zwischen zwei benachbarten Stücken?

Deutschland



(**A**) 1° (**B**) 2° (**C**) 3° (**D**) 4° (**E**) 5°

Lösung: Die 10 Kuchenstücke sind gleich gross. Somit ist der Winkel an der Spitze jedes Kuchenstücks $360° : 10 = 36°$ gross. Da nun ein Stück fehlt, ist die Summe der 9 Winkel zwischen zwei benachbarten der restlichen 9 Stücke gleich 36°. Und da die 9 Stücke so angeordnet sind, dass die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich gross sind, ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Stücken jeweils $36° : 9 = 4°$ gross.

15. Marta möchte auf dem Kühlschrank mit dreieckigen Zahlenmagneten das Datum an jedem Tag des Jahres darstellen können. Dafür möchte sie jeweils vier Zahlenmagnete mit jeweils einer Ziffer verwenden. Die Magnete sollen mit einer Spitze nach oben zeigen und die Zahlen aufrecht zu lesen sein. Was ist die <u>kleinste Anzahl</u> von Magneten, mit denen sie das schaffen kann?

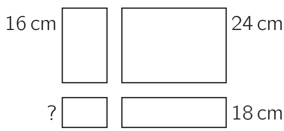
Spanien

(**A**) 24 (**B**) 23 (**C**) 22 (**D**) 21 (**E**) 20

Lösung: Marta benötigt für jede Ziffer mindestens zwei Magnete, weil es für jede Ziffer ein Datum gibt, an dem diese gleichzeitig beim Tag und beim Monat als Einerziffer vorkommt. Zum Beispiel für die Ziffer 9 am 09.09. Die Ziffern von 4 bis 9 können weder beim Tag noch beim Monat als Zehnerziffer vorkommen, deshalb reichen für diese Ziffern jeweils zwei Magnete aus.
Die Ziffer 3 kann beim Monat nicht als Zehnerziffer vorkommen, aber beim Tag. Wenn sie beim Tag als Zehnerziffer vorkommt, dann kann sie beim Tag nicht auch noch als Einerziffer vorkommen, weil es keinen 33. gibt. Deshalb reichen zwei Magnete mit der Ziffer 3 aus.
Marta benötigt drei Magnete mit der Ziffer 2 um den 22.12. darzustellen, aber keinen vierten, weil die Zehnerziffer beim Monat keine 2 sein kann.
Marta benötigt vier Magnete mit der Ziffer 1, um den 11.11. darzustellen.
Die Ziffer 0 kann zwar an allen Positionen vorkommen, aber weder beim Tag noch beim Monat gleichzeitig an der Einer- und der Zehnerstelle. Daher reichen zwei Magnete mit der Ziffer 0 aus.
Insgesamt sind das $8 \cdot 2 + 3 + 4 = 23$ Magnete.

16. Per hat ein grosses Rechteck in vier kleinere Rechtecke zerschnitten. Der Umfang von drei der kleinen Rechtecke ist im Bild angegeben. Welchen Umfang hat das vierte kleine Rechteck?

Niederlande



(**A**) 6 cm (**B**) 8 cm (**C**) 10 cm (**D**) 12 cm (**E**) 14 cm

Lösung: Sowohl bei den beiden oberen als auch bei den beiden unteren Rechtecken sind die Längen der vertikalen Seiten gleich und die Längen der beiden horizontalen Seiten unterscheiden sich in Summe genau um so viel wie die beiden Umfänge. Also ist der gesuchte Umfang um $24\,\text{cm} - 16\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$ kürzer als der Umfang des Rechtecks rechts unten. Er beträgt folglich $18\,\text{cm} - 8\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.
Wer sieht, dass sich aus den Seiten von zwei jeweils diagonal gegenüberliegenden kleinen Rechtecken genau der Umfang des grossen Rechtecks zusammensetzen lässt, kann den gesuchten Umfang als $(16\,\text{cm} + 18\,\text{cm}) - 24\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$ berechnen.
Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, für eine der Seiten eines der kleinen Rechtecke eine Seitenlänge festzulegen (mit einem Zahlenwert oder einer Variablen) und alle anderen Seitenlängen der kleinen Rechtecke und schliesslich den gesuchten Umfang damit zu bestimmen.

17. Nicos Opa hat Ravioli gemacht. Nico hat sie so auf 6 Teller verteilt, dass auf allen gleich viele Ravioli sind. „Jeder sollte erst einmal eine kleinere Portion bekommen“, sagt Nicos Oma und nimmt von jedem Teller 3 Ravioli wieder herunter. Nico stellt fest: „Du hast insgesamt so viele Ravioli heruntergenommen, wie vorher zusammen auf 2 Tellern lagen.“ Wie viele Ravioli liegen nun auf jedem Teller?

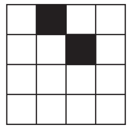
Ungarn

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Nicos Oma hat von 6 Tellern je 3 Ravioli heruntergenommen, also insgesamt $6 \cdot 3 = 18$. So viele Ravioli lagen vorher zusammen auf 2 Tellern. Also waren es vorher auf jedem Teller $18 : 2 = 9$ Ravioli. Jetzt liegen auf jedem Teller 3 Ravioli weniger, das heisst $9 - 3 = 6$.

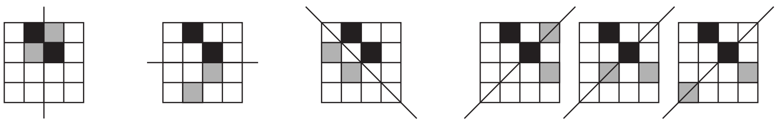
18. Im rechts abgebildeten Quadrat möchte Aila zwei weitere Kästchen schwarz ausmalen, sodass das Quadrat anschliessend eine Symmetrieachse besitzt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Aila dafür?

China



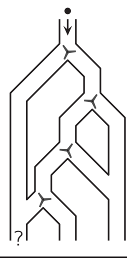
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Ein Quadrat hat 4 Symmetrieachsen. Für die vertikale Symmetrieachse müssen die beiden Kästchen ausgemalt werden, die zu den bereits ausgemalten Kästchen symmetrisch liegen. Dies gilt ebenso für die horizontale Symmetrieachse und für die diagonale Symmetrieachse, die von links oben nach rechts unten verläuft.
Für die vierte Symmetrieachse steht nur ein Kästchen fest, das sicher ausgemalt werden muss. Als zweites Kästchen muss ein Kästchen ausgemalt werden, das zu sich selbst symmetrisch ist, das heisst auf der Symmetrieachse liegt – dafür gibt es 3 Möglichkeiten. Insgesamt sind es 6 Möglichkeiten.



In die abgebildete Kugelbahn werden oben 16 Kugeln nacheinander eingefüllt. Jedes Kipprädchen lässt die Kugeln immer abwechselnd nach links oder nach rechts fallen.

Wie viele der 16 Kugeln kommen beim Ausgang links unten an?



19. Ein Känguru springt einen Berg hinauf und dann auf demselben Weg zum Startpunkt zurück. Bergauf springt es mit jedem Sprung 1 m weit. Bergab legt es mit jedem Sprung 3 m zurück. Insgesamt macht das Känguru 2024 Sprünge. Welchen Weg legt das Känguru dabei insgesamt zurück?

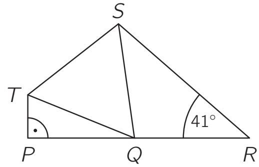
Österreich

(**A**) 5060 m (**B**) 4284 m (**C**) 3542 m (**D**) 3036 m (**E**) 2530 m

Lösung: Das Känguru springt bergab mit jedem Sprung 3-mal so weit wie bergauf. Da es bergauf und bergab dieselbe Strecke zurücklegt, macht es folglich bergauf 3-mal so viele Sprünge wie bergab. Bergab findet also ein Viertel aller Sprünge statt, das sind $2024 : 4 = 506$ Sprünge. Bei jedem Sprung bergab legt das Känguru 3 m zurück, der Weg bergab ist also $506 \cdot 3\,\text{m} = 1518\,\text{m}$ lang. Der Weg bergauf ist derselbe, also auch 1518 m lang. Das Känguru legt insgesamt $2 \cdot 1518\,\text{m} = 3036\,\text{m}$ zurück.

20. In der Figur rechts liegen die Punkte P, Q und R auf einer Geraden. Das Dreieck PQT ist rechtwinklig. Das Dreieck QST ist gleichseitig. Das Dreieck QRS ist gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{QR}$ und $\overline{QS}$. Der Winkel SRQ ist 41° gross. Wie gross ist der Winkel PTS?

Grossbritannien

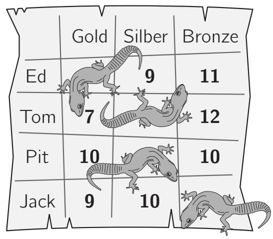


(**A**) 129° (**B**) 128° (**C**) 127° (**D**) 126° (**E**) 125°

Lösung: Der Winkel PTS ist ein Innenwinkel im Viereck $PRST$. Wir berechnen seine Grösse mithilfe der Innenwinkelsumme, die im Viereck 360° beträgt.
Im gleichschenkligen Dreieck QRS sind die Winkel SRQ und QSR Basiswinkel, das heisst gleich gross. Der Winkel QSR ist also 41° gross. Da das Dreieck QST gleichseitig ist, sind seine Innenwinkel alle 60° gross. Folglich haben im Viereck $PRST$ die Innenwinkel an den Ecken P, R und S die Grössen 90°, 41° und $41° + 60° = 101°$. Der Winkel PTS ist also $360° - 90° - 41° - 101° = 128°$ gross.
Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir nacheinander alle Innenwinkel der Dreiecke bestimmen. Der Winkel RQS ist ein Innenwinkel im gleichschenkligen Dreieck RSQ und $180° - 2 \cdot 41° = 98°$ gross. Der Winkel TQP ist $180° - 60° - 98° = 22°$ gross, da die Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen. Der Winkel PTQ ist ein Innenwinkel im Dreieck PQT und $180° - 90° - 22° = 68°$ gross. Der gesuchte Winkel PTS ist schliesslich $68° + 60° = 128°$ gross.

21. Vier Piraten haben bei Kerzenschein gezählt, wie viele Gold-, Silber- und Bronzemünzen sie erbeutet haben. Als Kapitän Flint spät in der Nacht kontrollieren will, huschen vier neugierige Geckos schnell von den Notizen. Nur einer der Piraten hat alles richtig gezählt. Die anderen haben bei jeder Sorte falsch gezählt. Insgesamt sind es 30 Münzen. Wie viele Goldmünzen haben die Piraten erbeutet?

Griechenland

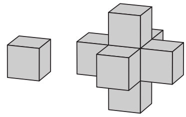


(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Wenn Ed richtig gezählt hätte, dann müsste er $30 - 9 - 11 = 10$ Goldmünzen gezählt haben, genauso viele wie Pit. Da die anderen Piraten aber bei allen Sorten falsch gezählt haben, kann Ed nicht richtig gezählt haben. Hätte Tom richtig gezählt, dann wären es bei ihm $30 - 7 - 12 = 11$ Silbermünzen. Die Münzzahlen bei den anderen Piraten, egal ob mit oder ohne Gecko darauf, könnten sich bei allen Sorten von den Zahlen bei Tom unterscheiden. Deshalb ist es möglich, dass Tom richtig gezählt hat. Hätte Pit richtig gezählt, dann müsste er $30 - 10 - 10 = 10$ Silbermünzen gezählt haben, genauso viele wie Jack. Und hätte Jack richtig gezählt, dann müsste er $30 - 9 - 10 = 11$ Bronzemünzen gezählt haben, genauso viele wie Ed. Weil die anderen Piraten aber bei allen Sorten falsch gezählt haben, können Pit und Jack nicht richtig gezählt haben. Der einzig mögliche Fall ist, dass Tom richtig gezählt hat. Da er 7 Goldmünzen gezählt hat, haben die Piraten 7 Goldmünzen erbeutet.

22. Amir hat viele gleich grosse Würfel. Er nimmt einen Würfel und klebt 6 Würfel so an, dass alle seine Seitenflächen vollständig verdeckt sind. Nun möchte er an den neuen Körper zusätzliche Würfel so kleben, dass dessen Seitenflächen alle verdeckt sind. Wie viele zusätzliche Würfel benötigt Amir dafür <u>mindestens</u>?

Brasilien



(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Von jedem der äusseren 6 Würfel sind 5 Seitenflächen zu verdecken, also insgesamt $6 \cdot 5 = 30$. Für die 6 äusseren Seitenflächen benötigen wir dafür 6 zusätzliche Würfel. Von den anderen $30 - 6 = 24$ Seitenflächen verdecken wir mit einem zusätzlichen Würfel stets 2 Seitenflächen gleichzeitig. Für diese brauchen wir demzufolge $24 : 2 = 12$ zusätzliche Würfel. Insgesamt werden somit $6 + 12 = 18$ zusätzliche Würfel benötigt.

23. Auf einem Foto von Milenas 9. Geburtstag sind alle Gäste zu sehen. Jedes Kind hat die Arme oben und zeigt 9 Finger. Mit den linken Händen zeigen sie insgesamt 26 Finger. Wie viele Finger zeigen sie mit den rechten Händen insgesamt?

Grossbritannien

(**A**) 19 (**B**) 25 (**C**) 28 (**D**) 32 (**E**) 37

Lösung: Jedes Kind zeigt mit einer Hand 5 Finger und mit der anderen Hand 4 Finger. Wir wollen zuerst herausfinden, wie viele Kinder mit der linken Hand 5 Finger und wie viele 4 Finger zeigen. Da 26 nicht durch 4 teilbar ist, ist ganz sicher ein Kind dabei, das 5 Finger zeigt. Da $26 - 5 = 21$ nicht durch 4 teilbar ist, zeigt ganz sicher ein weiteres Kind 5 Finger. Da $21 - 5 = 16$ durch 4 teilbar ist, $16 = 4 \cdot 4$, können 4 Kinder jeweils 4 Finger zeigen. Da keine der Zahlen $(16 - 5 =)$ 11, $(11 - 5 =)$ 6 und $(6 - 5 =)$ 1 durch 4 teilbar ist, ist eindeutig bestimmt, dass mit den linken Händen 2 Kinder 5 Finger und 4 Kinder 4 Finger zeigen. Es sind also 6 Kinder. Mit den rechten Händen zeigen 2 Kinder 4 Finger und 4 Kinder 5 Finger. Das sind insgesamt $2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 28$ Finger.

24. Ilona verkauft auf dem Markt rote und gelbe Äpfel. Sie hat 6 Körbe mit 6, 8, 11, 12, 14 und 16 Äpfeln. Der erste Kunde kauft gleich einen kompletten Korb. Jetzt sind noch doppelt so viele rote wie gelbe Äpfel vorhanden. Wie viele Äpfel hat der Kunde gekauft?

Ungarn

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

Lösung: Da nach dem ersten Kunden doppelt so viele rote wie gelbe Äpfel vorhanden sind, ist die Anzahl der verbliebenen Äpfel durch 3 teilbar. Am Anfang waren es insgesamt $6+8+11+12+14+16 = 67$ Äpfel. Da 67 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, muss auch die gekaufte Anzahl Äpfel bei Division durch 3 den Rest 1 lassen. Von den Zahlen 6, 8, 11, 12, 14 und 16 lässt nur 16 bei Division durch 3 den Rest 1. Folglich hat der Kunde 16 Äpfel gekauft.
Enthalten alle Körbe nur entweder rote oder gelbe Äpfel, so sind nach dem Kauf die gelben Äpfel in den Körben mit 6 und 11 Äpfeln (insgesamt 17 gelbe Äpfel) und die roten Äpfel in den Körben mit 8, 12 und 14 Äpfeln (insgesamt $34 = 2 \cdot 17$ rote Äpfel). Es ist aber auch möglich, dass die Körbe nicht sortenrein sind. In jedem Fall sind nach dem ersten Kunden noch 17 gelbe und 34 rote Äpfel vorhanden.

Wer kann die Ziffern von 0 bis 6 so auf die leeren Kästchen verteilen, dass das Ergebnis der Rechnung die Jahreszahl 2024 ist?

$$\square\square \cdot \square\square + \square\square\square = \boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{4}$$

25. Sieben Karten mit den Zahlen von 1 bis 7 werden verdeckt auf den Tisch gelegt. David, Anastasia und Lennox nehmen jeweils zwei der Karten.

Vietnam

David stellt fest: „Eine meiner beiden Zahlen ist um 5 grösser als die andere.“
Anastasia stellt fest: „Die Summe meiner beiden Zahlen ist 6.“
Lennox stellt fest: „Eine meiner beiden Zahlen ist doppelt so gross wie die andere.“

Welche Zahl steht auf der Karte, die noch auf dem Tisch liegt?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

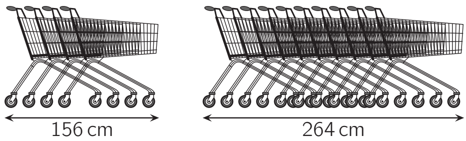
Lösung: Wir überlegen uns zunächst für jedes Kind einzeln, welche zwei Karten es auf der Hand haben könnte:

David hat: 1 und 6 <u>oder</u> 2 und 7.
Anastasia hat: 1 und 5 <u>oder</u> 2 und 4.
Lennox hat: 1 und 2 <u>oder</u> 2 und 4 <u>oder</u> 3 und 6.

Entweder hat David die 1 und Anastasia die 2 oder David hat die 2 und Anastasia die 1. Das heisst, dass ganz sicher einer der beiden die 1 und der andere die 2 hat. Da Lennox somit keine 1 und keine 2 haben kann, muss er 3 und 6 haben. Folglich hat David 2 und 7 und Anastasia hat 1 und 5. Die 4 liegt noch auf dem Tisch.

26. Portugal

Vier ganz ineinandergeschobene Einkaufswagen sind 156 cm lang, und zehn ganz ineinandergeschobene Einkaufswagen sind 264 cm lang. Wie lang ist ein solcher Einkaufswagen?

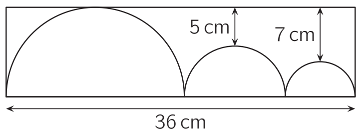


(**A**) 94 cm (**B**) 96 cm (**C**) 98 cm (**D**) 100 cm (**E**) 102 cm

Lösung: Eine Einkaufswagenschlange verlängert sich mit jedem weiteren Einkaufswagen um dieselbe Länge, sagen wir x. Die Einkaufswagenschlange aus 10 Einkaufswagen enthält 6 Einkaufswagen mehr als die Einkaufswagenschlange aus 4 Einkaufswagen. Folglich ist sie um die Länge $6x$ länger, das heißt, es gilt $156\,\text{cm} + 6x = 264\,\text{cm}$, woraus $x = (264\,\text{cm} - 156\,\text{cm}) : 6 = 18\,\text{cm}$ folgt. Entfernen wir 3 Einkaufswagen aus der Einkaufswagenschlange aus 4 Einkaufswagen, bleibt ein einzelner Einkaufswagen übrig. Ein Einkaufswagen ist also $156\,\text{cm} - 3x = 156\,\text{cm} - 3 \cdot 18\,\text{cm} = 102\,\text{cm}$ lang.

27. Spanien

Drei Halbkreise berühren einander und das Rechteck, dessen längere Seite 36 cm lang ist. Die Abstände des mittelgrossen und des kleinen Halbkreises zur oberen langen Rechtecksseite betragen 5 cm und 7 cm. Wie gross ist der Umfang des Rechtecks? (*Abbildung nicht massstabsgerecht*)

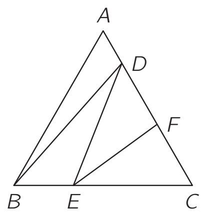


(**A**) 90 cm (**B**) 92 cm (**C**) 94 cm (**D**) 96 cm (**E**) 98 cm

Lösung: Wir bezeichnen die Länge der kürzeren Rechtecksseite mit r, was gleichzeitig der Radius des grössten Halbkreises ist. Im Bild lesen wir ab, dass der Radius des mittelgrossen Halbkreises $r - 5\,\text{cm}$ und der Radius des kleinen Halbkreises $r - 7\,\text{cm}$ ist.
Da die Durchmesser der Halbkreise zusammen genauso lang sind wie die lange Rechtecksseite, gilt $36\,\text{cm} = 2r + 2\cdot(r - 5\,\text{cm}) + 2\cdot(r - 7\,\text{cm})$. Daraus folgt $6r = 60\,\text{cm}$, das heisst, $r = 10\,\text{cm}$. Der Umfang des Rechtecks ist somit $2 \cdot 36\,\text{cm} + 2r = 72\,\text{cm} + 20\,\text{cm} = 92\,\text{cm}$ gross.

28. China

Das gleichseitige Dreieck ABC hat eine Seitenlänge von 120 cm. Auf den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ liegen die Punkte D, E und F so, dass die Strecken $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EF}$ das Dreieck in 4 kleinere Dreiecke teilen, die denselben Flächeninhalt haben. (*Abbildung nicht massstabsgerecht*)
Welche Länge hat die Strecke $\overline{CF}$?

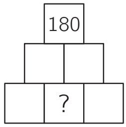


(**A**) 45 cm (**B**) 46 cm (**C**) 47 cm (**D**) 48 cm (**E**) 49 cm

Lösung: Da die 4 kleineren Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, ist der Flächeninhalt des Dreiecks BDA ein Viertel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Die Dreiecke BDA und ABC haben dieselbe Höhe auf die Grundseiten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{AC}$. Bezeichnen wir diese Höhe mit h_1, so erhalten wir mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke $\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_1$. Daraus folgt $|AD| = \frac{1}{4} \cdot |AC|$, also $|AD| = \frac{1}{4} \cdot 120\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Die Strecke $\overline{CD}$ ist somit $120\,\text{cm} - 30\,\text{cm} = 90\,\text{cm}$ lang.
Dasselbe Prinzip wenden wir auf die beiden Dreiecke ECF und EFD an. Sie haben denselben Flächeninhalt und dieselbe Höhe auf die Grundseiten $\overline{CF}$ bzw. $\overline{DF}$. Bezeichnen wir diese Höhe mit h_2, so erhalten wir mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke $\frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot h_2$. Daraus folgt $|CF| = |DF|$. Also ist die Strecke $\overline{CF}$ halb so lang wie die Strecke $\overline{CD}$, das heisst $90\,\text{cm} : 2 = 45\,\text{cm}$.

29. Donggyu möchte in jedes Kästchen der Figur eine natürliche Zahl schreiben. Dabei soll das Produkt zweier waagerecht benachbarter Zahlen stets in dem Kästchen direkt darüber stehen. Ganz oben steht die Zahl 180. Wie viele verschiedene Zahlen grösser als 1 können in dem Kästchen mit dem Fragezeichen stehen?

Türkei



(**A**) 8 (**B**) 6 (**C**) 5 (**D**) 3 (**E**) 2

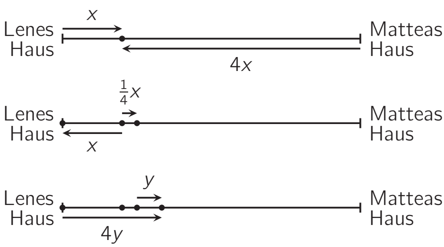
Lösung: Die Zahl im Kästchen mit dem Fragezeichen bezeichnen wir mit x und die beiden anderen Zahlen in der unteren Zeile der Figur mit a und b. Dann stehen in der mittleren Zeile der Figur die Zahlen $a \cdot x$ und $b \cdot x$ und ganz oben $a \cdot x \cdot b \cdot x = a \cdot b \cdot x^2$. Also gilt $180 = a \cdot b \cdot x^2$. Wir müssen also herausfinden, welche Quadratzahlen größer als 1 Teiler von 180 sind. Dazu zerlegen wir 180 in Primfaktoren: $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. In einer Quadratzahl grösser als 1 kommt jeder Primfaktor in einer geraden Anzahl vor. Die einzigen Quadratzahlen, die grösser als 1 und Teiler von 180 sind, sind somit 2^2, 3^2 und $2^2 \cdot 3^2 = 6^2$. Also kann x nur eine der Zahlen 2, 3 und 6 sein. Das sind 3 verschiedene Zahlen.
Die jeweils anderen Primfaktoren von 180 können beliebig auf die beiden äusseren Kästchen in der unteren Reihe aufgeteilt werden, wobei in einem Kästchen auch die Zahl 1 stehen kann.

30. Lene fährt mit dem Trottinett von ihrem Haus zu Matteas Haus und sofort wieder zurück. Mattea fährt mit dem Fahrrad von ihrem Haus zu Lenes Haus und sofort wieder zurück. Lene und Mattea fahren auf derselben Strecke, starten zur selben Zeit und fahren jeweils mit konstanter Geschwindigkeit. Mit dem Fahrrad ist Mattea viermal so schnell wie Lene mit dem Trottinett. Zum ersten Mal treffen sich Lene und Mattea 18 min nach dem Start. Wie lange nach dem Start treffen sie sich zum zweiten Mal?

Moldawien

(**A**) 24 min (**B**) 25 min (**C**) 27 min (**D**) 28 min (**E**) 30 min

Lösung: Wir bezeichnen die Länge des Weges, den Lene von ihrem Haus bis zum ersten Treffpunkt zurücklegt, mit x. Mattea ist viermal so schnell wie Lene und somit ist die Länge des Weges von ihrem Haus bis zum ersten Treffpunkt $4x$. Nach dem ersten Treffpunkt legt Mattea bis zu Lenes Haus einen Weg der Länge x zurück. Da Mattea viermal so schnell wie Lene ist, legt Lene in dieser Zeit einen Weg der Länge $\frac{1}{4}x$ zurück. Lene befindet sich nun $x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x$ von ihrem Haus entfernt.
Nun fahren beide Mädchen in dieselbe Richtung. Wir bezeichnen die Länge des Weges, den Lene nun noch bis zum zweiten Treffpunkt zurücklegt, mit y. Da Mattea viermal so schnell ist, muss sie bis zum zweiten Treffpunkt $4y$ zurücklegen. Somit ist der zweite Treffpunkt von Lenes Haus einerseits $\frac{5}{4}x + y$ und anderseits $4y$ entfernt. Also gilt $\frac{5}{4}x + y = 4y$. Daraus folgt $3y = \frac{5}{4}x$, das heisst $y = \frac{5}{12}x$.



Somit ist der zweite Treffpunkt von Lenes Haus $x + \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}x = \frac{20}{12}x = \frac{5}{3}x$ entfernt. Das ist genau die Strecke, die Lene vom Start bis zum zweiten Treffpunkt fährt. Da sie für eine Strecke der Länge x 18 min braucht, erreicht sie den zweiten Treffpunkt also nach $\frac{5}{3} \cdot 18\,\text{min} = 5 \cdot 6\,\text{min} = 30\,\text{min}$.
Die beiden Mädchen treffen sich 30 min nach dem Start zum zweiten Mal.
Wer sieht, dass Mattea nach $27\,\text{min} = 18\,\text{min} + 9\,\text{min}$ zum zweiten Mal am ersten Treffpunkt ankommt, kann die Antworten (**A**), (**B**) und (**C**) ausschliessen und muss sich dann überlegen, dass Mattea nach 1 min noch nicht zu Lene aufgeschlossen haben kann.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Antwort	A	D	C	A	C	B

Aufgabe	7	8	9	10	11	12
Antwort	B	A	A	E	E	D

Aufgabe	13	14	15	16	17	18
Antwort	B	E	D	B	C	A

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	B	C	A	E	D	B	D	C

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	E	A	B	B	D	C	E	C

Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	D	D	C	A	E	B	E	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	C	D	E	C	A	B	B	E	B

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	E	D	D	B	C	C	D	D	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	E	C	E	B	E	B	A	D	E

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.

2024

Das Titelbild ist dem Vater der fraktalen Geometrie, Benoît Mandelbrot, gewidmet. Er wäre in diesem Jahr 100 Jahre alt geworden.

Fraktale sind geometrische Objekte mit einer unendlich feinen, sich wiederholenden Struktur. Diese lässt sich durch Hineinzoomen entdecken. Ein Fraktal zeichnet sich dadurch aus, dass Teile davon ähnlich zum gesamten Objekt sind. Das kennen wir auch von realen Objekten wie Farnblättern, Blumenkohl, Schneeflocken, Küstenlinien, Wolken oder Sternhaufen in Galaxien. Fraktale sehen meist kompliziert aus. Sie entstehen aber oft nach einer einfachen Regel, so wie die Julia-Menge, die auf der Vorderseite zu sehen ist.

grafik | steffen blankenburg | elephant-castle.de

www.kaenguru-schweiz.ch
www.kangourou-suisse.ch